Механика
Транспорт
Комуникации
Научно списание

ISSN 1312-3823
том 12, брой 3/2, 2014 г.
статия № 0997
http://www.mtc-aj.com

ОБОБЩЕН МЕТОД НА НЮТОН И ЗАДАЧИ ЗА ОПТИМАЛНО РАЗПОЛАГАНЕ НА ТОЧКОВИ ОБЕКТИ

Драго Михалев, Райна Алашка
michalev@abv.bg, alraina@abv.bg

ВТУ „Тодор Каблешков", ул. „Гео Милев"158, София 1574,
катедра „Математика и информатика",
БЪЛГАРИЯ

Ключови думи: *числени методи, минимум, минимаксни задачи, оптимално управление, оптимизация, метод на Нютон, метод на хордите, апроксимация, интерполация, приближение, квадратична мажоранта, изпъкнала функция, разстояние, транспорт, електротехника, строителство, комуникации.*

Резюме: *В статията са дадени методи, които са обобщение на метода на Нютон и метода на хордите за решаване на нелинейни уравнения. Кратко е описан вариационният метод на квадратичната мажоранта за числено намиране на точката на минимум за функция. Дадени са няколко често срещани задачи от транспорта, електротехниката, комуникациите и строителството за намиране на минимално разстояние и други минимаксни задачи. За решаването на тези задачи се използва посоченият метод.*

ВЪВЕДЕНИЕ

Статията съдържа три основни раздела.

В първия раздел са описани два стандартни метода за решаване на нелинейни уравнения- метод на хордите и метод на допирателните (на Нютон). Тези методи използват решаване на поредица от линейни уравнения, които водят до последователни приближения към точния корен на първоначалното нелинейно уравнение. Дадени са обобщения на тези методи, които използват единия от корените на квадратно уравнение за получаване на последователни приближения към точния корен на първоначалното нелинейно уравнение. Ще напомним че освен линейното и квадратното уравнение могат да се решат лесно с прости формули. Описаните от нас обобщени методи са по-бързо сходящи от стандартните методи.

Във втория раздел са дадени приложения на методите за решаване на нелинейно уравнение за намиране на минимум на функция. Описан е кратко вариационният метод на претеглените квадратични мажоранти за намиране на минимум. При него на всяка стъпка самата функцията се замества с подходяща мажорираща парабола.

В третия раздел са посочени примери на задачи за намиране на минимум с приложение в транспорта, строителството и комуникациите. Даден е пример и на минимаксна задача с приложение в посочените области. В повечето от задачите е посочена съответната квадратична мажоранта и е даден начинът за нейното получаване. Посочени са и други области, където възникват подобни задачи.

РАЗДЕЛ 1. ОБОБЩЕНИЕ НА НЯКОИ МЕТОДИ ЗА РЕШАВАНЕ НА НЕЛИНЕЙНИ УРАВНЕНИЯ

Методите за решаване на нелинейно уравнение предполагат, че сме отделили корена на уравнението $f(x)=0$. Това означава, че сме намерили интервал $[a,b]$, в който уравнението има само един корен. Условията за това са в краищата функцията $f(x)$ да има различни знаци, производната на функцията да не променя знака си и функцията да не сменя изпъкналостта си. Без ограничение на общността ще предположим, че $f(a)<0$, $f'(x)\geq 0$ и функцията е изпъкнала отдолу. Методите за решаване на това нелинейно уравнение използват структурните свойства на конкретната функция. На всяка стъпка изходната функция се апроксимира с права и се решава линейно уравнение за намиране на съответното приближение към точния корен. При метода на хордите се получава интерполационен полином от първа степен през точките $A(a, f(a))$ и $B(b, f(b))$ и се приравнява на нула, по този начин след решаването на уравнението се получава следващото приближение x_1. При този метод вземаме за начално приближение $x_0=a$. Намираме правата

$\overline{\varphi}_1: \quad y-f(a)=\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}.(x-a)$, полагаме $y=0$ и получаваме първото приближение на корена: $x_1=x_0-\dfrac{b-x_0}{f(b)-f(x_0)}.f(x_0)$. Аналогично за следващите приближения имаме: $x_{k+1}=x_k-\dfrac{b-x_k}{f(b)-f(x_k)}.f(x_k)$.

При метода на Нютон се построява допирателна през точката $B(b, f(b))$ към функцията $f(x)$ и се приравнява на нула, по този начин след решаването на уравнението се получава следващото приближение x_1. При този метод вземаме за начално приближение $x_0=b$. Построяването на допирателната е еквивалентно да вземем реда на Тейлор за функцията $f(x)$ до първата производна около точката $B(b, f(b))$ и да положим $f(x)=0$. Тогава имаме: $f(x)-f(b)=f'(b).(x-b)$.

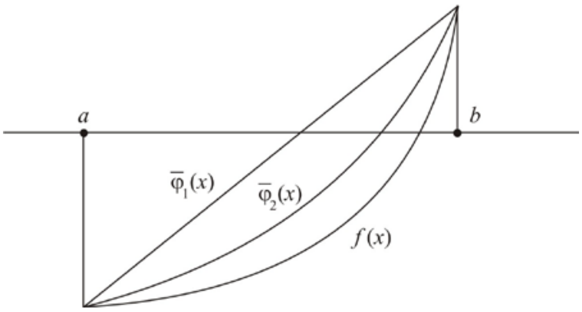
От тук намираме допирателната $\varphi_1: \quad y-f(b)=f'(b).(x-b)$, полагаме $y=0$ и за първото приближение на корена имаме: $x_1=x_0-\dfrac{f(x_0)}{f'(x_0)}$. Аналогично за следващите приближения имаме: $x_{k+1}=x_k-\dfrac{f(x_k)}{f'(x_k)}$.

Обобщението на тези два метода е като вместо прави използваме съответни параболи. За обобщението на **метода на хордите** ще използваме Ермитова интерполация чрез полином от втора степен $\overline{\varphi}_2(x)$, такъв че $\overline{\varphi}_2'(a)=f'(a)$, $\overline{\varphi}_2(a)=f(a)$, $\overline{\varphi}_2(b)=f(b)$. Тогава получаваме параболата:

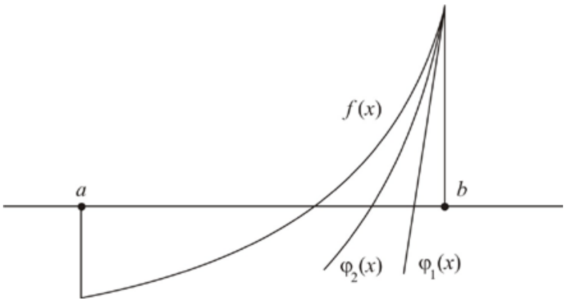
$$\overline{\varphi}_2(x): \quad y=f(a)+(x-a)f'(a)+\frac{\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}-f'(a)}{b-a}(x-a)^2 .$$

Полагаме $y=0$ и вземаме за начално приближение $x_0=a$, тогава получаваме квадратното уравнение и чрез по-големия от корените му намираме x_1:

$$0 = f(x_0) + (x - x_0) f'(x_0) + \frac{\dfrac{f(b) - f(x_0)}{b - x_0} - f'(x_0)}{b - x_0}(x - x_0)^2 \ .$$



Фиг.1



Фиг.2

Изобщо за намиране на следващото приближение x_{k+1} към точния корен на първоначалното уравнение търсим по-големия корен на квадратното уравнение:

$$0 = f(x_k) + (x - x_k) f'(x_k) + \frac{\dfrac{f(b) - f(x_k)}{b - x_k} - f'(x_k)}{b - x_k}(x - x_k)^2 \ .$$

Това важи при първоначалните предположения за функцията, че $f(a) < 0$, $f'(x) \geq 0$ и функцията е изпъкнала отдолу. При други предположения може да се вземе по-малкия от корените на квадратното уравнение.

Можем да обобщим метода на хордите и чрез друг подход. Вместо Ермитова интерполация ще направим обикновена интерполация с полином от втора степен, но за целта ще ни е необходима още една точка. Такава може да бъде например точката $C(\frac{a+b}{2}, f(\frac{a+b}{2}))$. Тогава ще получим параболата:

$$\tilde{\varphi}_2(x): \quad y = f(a) + (x-a)2.\frac{f(\frac{a+b}{2}) - f(a)}{b-a} + \frac{f(b) - 2f(\frac{b+a}{2}) + f(a)}{(b-a)^2}.2(x-a)(x - \frac{a+b}{2}) \ .$$

Полагаме $y = 0$ и вземаме за начално приближение $x_0 = a$, тогава получаваме квадратното уравнение и чрез по-големия от корените му намираме x_1:

$$0 = f(x_0) + (x - x_0)2.\frac{f(\frac{x_0+b}{2}) - f(x_0)}{b - x_0} + \frac{f(b) - 2f(\frac{b+x_0}{2}) + f(x_0)}{(b-x_0)^2}.2(x - x_0)(x - \frac{x_0+b}{2}) \ .$$

Изобщо за намиране на следващото приближение x_{k+1} към точния корен на първоначалното уравнение търсим по-големия корен на квадратното уравнение:

$$0 = f(x_k) + (x - x_k)2.\frac{f(\frac{x_k+b}{2}) - f(x_k)}{b - x_k} + \frac{f(b) - 2f(\frac{b+x_k}{2}) + f(x_k)}{(b-x_k)^2}.2(x - x_k)(x - \frac{x_k+b}{2}).$$

Ако предположим, че сме намерили по някакъв начин приближенията x_{k-1}, x_k, x_{k+1}, то параболата може да се построи през тези три точки и да се намери x_{k+2}. Би могла, след намиране на няколко приближения по двата подхода, да се направи тяхна комбинация.

За обобщението на **метода на Нютон** ще вземем развитието в ред на Тейлор около точката $B(b, f(b))$ до втората производна и така ще получим параболата:

$$\varphi_2(x): \quad y = f(b) + f'(b)(x-b) + \frac{f''(b)}{2}(x-b)^2 .$$

Полагаме $y = 0$ и вземаме за начално приближение $x_0 = b$, тогава получаваме квадратното уравнение и чрез по-големия от корените му намираме x_1:

$$0 = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2}(x-x_0)^2 .$$

Изобщо за намиране на следващото приближение x_{k+1} към точния корен на първоначалното уравнение търсим по-големия корен на квадратното уравнение:

$$0 = f(x_k) + f'(x_k)(x-x_k) + \frac{f''(x_k)}{2}(x-x_k)^2 .$$

РАЗДЕЛ 2. ВАРИАЦИОНЕН МЕТОД НА КВАДРАТИЧНАТА МАЖОРАНТА ЗА НАМИРАНЕ МИНИМУМА НА ФУНКЦИЯ

За намиране точката на минимум за $f(x)$ при положение, че той е отделен и функцията е изпъкнала, то задачата се свежда до намиране на корен на уравнението $f'(x) = 0$. . Без ограничение на общността ще предположим, че $f'(a) < 0$, $f'(b) > 0$ и функцията е изпъкнала отдолу.

Ако използваме метода на Нютон за $f'(x)$, понеже $x_0 = b$, то имаме за приближението:

$x_{k+1} = x_k - \dfrac{f'(x_k)}{f''(x_k)}$, което е еквивалентно с намиране на точката на минимум за параболата: $\psi(x) = f(x_k) + f'(x_k)(x-x_k) + \dfrac{f''(x_k)}{2}(x-x_k)^2$.

Ако използваме метода на хордите за $f'(x)$, понеже $x_0 = a$, то имаме:

$x_1 = x_0 - \dfrac{b-x_0}{f'(b)-f'(x_0)}.f'(x_0)$, което е еквивалентно с намиране на точката на минимум за параболата: $\bar{\psi}(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \dfrac{f'(b)-f'(x_0)}{2(b-x_0)}(x-x_0)^2$.

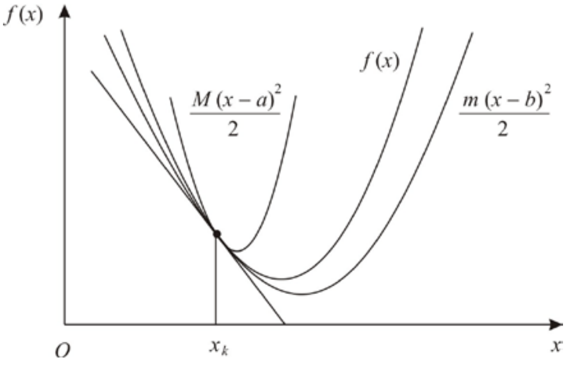
Сега ще опишем кратко метода на квадратичната мажоранта. За функцията $f(x)$, на която трябва да намерим минимума, построяваме парабола $\psi(x, x_k) = A + (x-C)^2.\dfrac{B}{2}$, която минава през точката $(x_k, f(x_k))$ и мажорира функцията $f(x)$ така, че

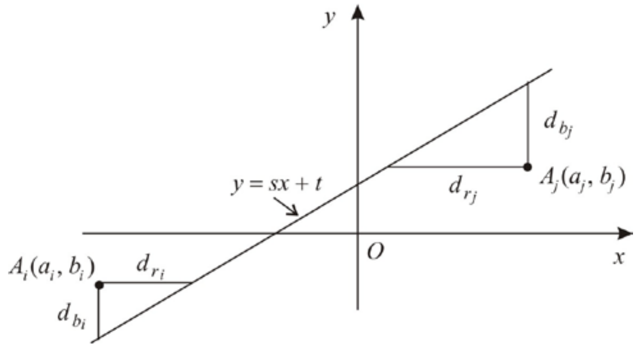
$$\psi(x, x_k)\Big|_{x=x_k} = f(x_k), \quad \psi'(x, x_k)\Big|_{x=x_k} = f'(x_k), \quad \psi(x, x_k) \ge f(x).$$

Намираме точката на минимум за параболата и я вземаме за следващо приближение на точката на минимум за функцията $f(x)$. Така продължаваме процедурата до достигане на необходимата точност. В многомерния случай се построява параболоид.

Ще отбележим, че за силно изпъкнала функция $f(x)$ е изпълнено $M|y| \ge |f'(x+y) - f'(x)| \ge m|y|$, $M > m \ge \delta > 0$ и за всяка точка x_k графиката й изцяло лежи между две параболи, допиращи се в точката x_k до функцията за нагледност виж фиг.3.

Ако функцията е сума от изпъкнали части, то сумата от квадратичните мажоранти на частите е мажоранта на функцията. За подробности виж [3].





Фиг.3 **Фиг.4**

РАЗДЕЛ 3. ПРИЛОЖНИ ЗАДАЧИ ЗА НАМИРАНЕ НА МИНИМУМ

Ще дадем пример с приложение в транспорта и електротехниката.

Пример1. В равнината са дадени точките $A_1, A_2, ..., A_n$ и се търси точка $X(x_1, x_2)$, която е най-малко отдалечена от тях като съвкупност. С други думи търси се точка, за която сумата от разстоянията до дадените точки е минимално. Би могло за всяка точка да се въведе тегло w_i.

За разстоянието между X и A_i имаме $l_i = \left|\sqrt{(x_1 - a_{1i})^2 + (x_2 - a_{2i})^2}\right|$. За мажориращ параболоид вземаме $\psi_i(x_1, x_2) = \dfrac{l_i^2(x_1, x_2)}{2\left|l_i(x_{1,0}, x_{2,0})\right|}$.

Получаваме рекурентна формула за $X_{k+1} = \arg\min(\sum_{i=1}^{n} P_{i,k}((x_1 - a_{1,i})^2 + (x_2 - a_{2,i})^2))$, където $P_{i,k} = w_i.(2\left|\sqrt{(x_{1,k} - a_{1i})^2 + (x_{2,k} - a_{2i})^2}\right|)^{-1}$.

Ще дадем пример с приложение в комуникациите.

Пример 2. В равнината са дадени точките $A_1, A_2, ..., A_n$ и се търси точка $X(x_1, x_2)$, която е на най-малко минимаксно разстояние от тях. С други думи търсим центъра на кръга с най-малък радиус, който покрива дадените точки $A_1, A_2, ..., A_n$.

Задачата за намиране на минимаксното разстояние е еквивалентна със задачата за намиране на минимума на функцията: $f(x_1, x_2) = \sum_{i=1}^{n} |r_i|^m$, при достатъчно голямо $m > 2$, където $r_i = \left|\sqrt{(x_1 - a_{1i})^2 + (x_2 - a_{2i})^2}\right|$.

Ще дадем пример за приложение в транспортното строителство.

Пример 3. В равнината са дадени точките $A_1, A_2, ..., A_n$ и положителни тегла w_i. Трябва да построим права $p : y = sx + t$, за която сумарното разстояние, отчитайки геометрията на града, от точките до нея е минимално. Под разстояние, отчитащо геометрията на града се разбира: $l_i(s,t) = \min\{d_{bi}, d_{ri}\}$, където $d_{bi} = |b_i - sa_i - t|$ е вертикалното разстояние, а $d_{ri} = \left|a_i - \frac{b_i}{s} + \frac{t}{s}\right|$ е хоризонталното разстояние (виж фиг.4.).

Задачата за минимизация се свежда до намирането на: $(s,t) = \arg\min \sum_{i=1}^{n} w_i \, l_i(s,t)$.

Мажориращите параболоиди за $d_{bi} = |b_i - sa_i - t|$ и $d_{ri} = \left|a_i - \frac{b_i}{s} + \frac{t}{s}\right|$ са съответно:

$$\psi_{bi} = \frac{(b_i - sa_i - t)^2}{2|b_i - s_k a_i - t_k| + \varepsilon} \quad \text{и} \quad \psi_{ri} = \frac{\left(a_i - \frac{b_i}{s} + \frac{t}{s}\right)^2}{2\left|a_i - \frac{b_i}{s_k} + \frac{t_k}{s_k}\right| + \varepsilon},$$ където ε е достатъчно малко.

ЛИТЕРАТУРА:

[1] Михалев Д. Й.. Метод вариационно-взвешенных квадратических мажорант в экономике и транспорте,. Сборник доклади - Тринадесета научна конференция с международно участие ”Транспорт 2003”, ВТУ”Тодор Каблешков”, София, 2003, стр.525-526.

[2] Улучев Р. К., Михалев Д. Й.. Приложна математика, ВТУ “Тодор Каблешков“, София, 2008

[3] Мудров В. И., Ивлев А.А.. Мажоранты Нютона в прикладных задачах, Радио и связь, Москва, 1987

GENERALIZATION OF NEWTON’S METHOD AND PROBLEMS FOR OPTIMAL LOCATION OF POINT OBJECTS

Drago Michalev, Rayna Alashka
michalev@abv.bg, alraina@abv.bg

Todor Kableshkov University of Transport, 158 Geo Milev Str., 1574 Sofia,
Department of Mathematics and Computer Science,
BULGARIA

Key words: *Numerical methods, Newton’s method, chord’s method, minimum, minimax, interpolation, approximation, quadratic majorants, nonlinear equations, optimization, optimal management, convex function, distance, transport, electrical engineering, communication and building.*

Abstract: *Some generalizations of Newton’s method and chord’s method for solving of nonlinear equations are given. The numerical method of quadratic majorants for finding minimum of convex function is short described. Some examples for approximate solving of minimum and minimax problems are given. They have many applications in transport, electrical engineering, communication and building.*