Механика
Транспорт
Комуникации
Научно списание

ISSN 1312-3823
том 12, брой 3/2, 2014 г.
статия № 0996
http://www.mtc-aj.com

МИНИМАЛНИ ОБОБЩЕНИ ХЕЛИКОИДИ

Огнян Касабов
okassabov@vtu.bg

ВТУ"Тодор Каблешков", кат. „Математика и информатика"
София 1574, ул. „Гео Милев" 158
БЪЛГАРИЯ

Ключови думи: *Минимални повърхнини, обобщени хеликоиди.*

Резюме: *Обобщените хеликоиди са повърхнини, които съдържат както стандартните хеликоиди, така и всички ротационни повърхнини. Получаваме диференциално уравнение, еквивалентно на условието един обобщен хеликоид да е минимална повърхнина. В гранични положения за участващите в решението константи се получават класическите хеликоиди и катеноиди.*

1. Въведение.

Едни от най-важните и интересни повърхнини в класическата диференциална геометрия са свързани със следната оптимизационна задача: измежду всички повърхнини, съдържащи дадена линия, да се намери такава, която има минимално лице. Оказва се че тази задача води до повърхнините с нулева средна кривина. Тези повърхнини се наричат минимални. Тяхното изучаване започват Ойлер и Лагранж в средата на 18-ти век. Първите известни минимални повърхнини (различни от тривиалния случай - равнината) са катеноидите [2]. Те са и единствените минимални ротационни повърхнини. Следващите минимални повърхнини са открити от Мьоние [4] през 1776 г. Това са хеликоидите, които са и единствените праволинейни минимални повърхнини. Оказва се, че получаването на нови минимални повърхнини е трудна задача, защото условието за минималност води до частно диференциално уравнение от втори ред. След около 50 години са намерени няколко нови минимални повърхнини, но истинското развитие на теорията на минималните повърхнини започва с трудовете на Енепер и Вайерщрас, когато тези повърхнини са свързани с холоморфните функции и са намерени общи формули за тяхното получаване, [1]. В наши дни минималните повърхнини са обект на засилен интерес поради приложението им в различни области: архитектура, наука за материалите, авиация, корабостроене, биология [5].

Както стана ясно, едни от първите минимални повърхнини са хеликоидите. Те могат да се разглеждат като получени от права, която извършва ротационно движение около ос и едновременно точка от правата се движи по тази ос. Когато заменим правата с произволна равнинна линия се получава повърхнина, наречена обобщен хеликоид [3]. Класически пример за обобщен хеликоид е повърхнината на Дини, която е и с постоянна Гаусова кривина [3]. Тук ще разгледаме условието един обобщен хеликоид да е минимална повърхнина, т.е. да е с нулева средна кривина. Ще видим, че това условие води до едно обикновено диференциално уравнение от втори ред. Решенията на това уравнение дават семейство минимални обобщени хеликоиди. Въпросните решения по естествен начин зависят от произволни константи. Ще покажем, че в гранични случаи за тези константи се получават класическите катеноиди и хеликоиди.

2. Предварителни сведения.

Нека S е повърхнина в тримерното пространство и да предположим, че тя е зададена със следното векторно параметрично уравнение:

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}(u,v) = (x_1(u,v), x_2(u,v), x_3(u,v)) \qquad (u,v) \in U \subset \mathrm{R}^2 .$$

Означаваме производните на векторната функция $\mathbf{x} = \mathbf{x}(u,v)$ с

$$\mathbf{x}_u = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial u} \qquad \mathbf{x}_v = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial v}.$$

Предполагаме, че повърхнината е регулярна, т.е. във всяка нейна точка векторната функция

$$\mathbf{x}_u \times \mathbf{x}_v$$

не се анулира. Тогава тази векторна функция е нормална към повърхнината и като я разделим на дължината ѝ, полу чаваме единичнен нормален вектор (по-точно векторно поле), който ще означаваме $\mathbf{U}$.

Основен инструмент за работа с повърхнините са двете основни форми. Коефициентите на първата основна форма са дефинирани със следните скаларни произведения:

$$E = \mathbf{x}_u^2, \qquad F = \mathbf{x}_u \mathbf{x}_v, \qquad G = \mathbf{x}_v^2.$$

Поради условието $\mathbf{x}_u \times \mathbf{x}_v \neq \mathbf{o}$ първата основна форма е положително определена, т.е. $EG - F^2 > 0$. Да въведем още вторите производни $\mathbf{x}_{uu}$, $\mathbf{x}_{uv}$, $\mathbf{x}_{vv}$ на векторната функция $\mathbf{x}(u,v)$. Тогава коефициентите на втората основна форма се дефинират с:

$$L = \mathbf{U}\,\mathbf{x}_{uu}, \qquad M = \mathbf{U}\,\mathbf{x}_{uv}, \qquad N = \mathbf{U}\,\mathbf{x}_{vv}.$$

Гаусовата кривина K и средната кривина H на разглежданата повърхнина са функциите

$$K = \frac{LN - M^2}{EG - F^2}, \qquad H = \frac{EN - 2FM + GL}{2(EG - F^2)}.$$

Както е добре известно, Гаусовата кривина е инвариантна при движение на повърхнината в пространството и при произволна смяна на променливите. Повърхнините, за които $K = const.$, се наричат повърхнини с постоянна кривина. От друга страна средната кривина H е инвариантна до знак при смяна на променливите. Оттук следва че условието $H = 0$ е инвариантно при смяна на променливите. Повърхнина, която изпълнява това условие се нарича *минимална повърхнина*. Както казахме, първите известни нетривиални минимални повърхнини са катеноидите и хеликоидите. Техни параметрични представяния се дават например със следните уравнения:

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}(u,v) = (a\,\mathrm{ch}(u/a)\cos v, a\,\mathrm{ch}(u/a)\sin v, u)$$

за катеноид и

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}(u,v) = (u\cos v, u\sin v, bv)$$

за хеликоид. Ясно е, че за получаването на хеликоид можем да използваме следната кинематична конструкция: да си мислим една движеща се права $l = l(v)$, която при $v = 0$ съвпада с абсцисната ос Ox_1 . Започваме да въртим тази права около апликатната ос Ox_3 и едновременно с това да я придвижваме по направлението на Ox_3, като скоростта на това придвижване е пропорционална на скоростта на ротация. Ако сега заменим движещата се права с произволна гладка линия в координатната равнина Ox_1x_3, ще получим повърхнина, която се нарича *обобщен хеликоид*. Уравнението на тази повърхнина ще има вида

(1) $$S: \quad \mathbf{x}(u,v) = (\varphi(u)\cos v, \varphi(u)\sin v, \psi(u) + bv)$$

където $\varphi(u)$ и $\psi(u)$ са гладки функции, дефиниращи изходната гладка линия $(\varphi(u), \psi(u))$ в равнината Ox_1x_3. Всяко междинно положение на тази линия се нарича *меридиан* на повърхнината S.

Ясно е, че при $b = 0$ повърхнината (1) е ротационна и обратно, всяка ротационна повърхнина може да се представи по този начин. От друга страна при $\psi(u) = 0$, $\varphi(u)=u$, повърхнината (1) е хеликоид.

3. Уравнението на минималните обобщени хеликоиди.

Всички разглеждания тук ще са локални. Ще започнем с представяне на търсената повърхнина в по-удобен вид. За целта първо да се убедим, че функцията $\varphi(u)$ не може да е константа. Наистина, да допуснем, че $\varphi(u)=C=const.$ Директно пресмятаме коефициентите на двете основни форми:

$$E = \psi'^2(u), \qquad F = b\psi'(u), \qquad G = b^2 + C^2,$$

$$L = 0, \qquad M = 0, \qquad N = \pm |C|.$$

Оттук средната кривина е $H = \pm 1/(2|C|)$ и следователно при $\varphi(u)=C=const.$ повърхнината не може да е минимална. Тогава можем локално да сменим параметризацията и да представим S във вида

(2) $$S: \quad \mathbf{x}(u,v) = (u\cos v, u\sin v, f(u) + bv).$$

За коефициентите на двете основни форми сега намираме:

$$E = f'^2(u) + 1, \qquad F = bf'(u), \qquad G = u^2 + b^2.$$

$$L = uf''(u)/W, \qquad M = -b/W, \qquad N = u^2 f'(u)/W$$

където $W = \sqrt{u^2 f'^2(u) + u^2 + b^2}$. Следователно условието $H = 0$ води до диференциалното уравнение

(3) $$u(u^2 + b^2) f''(u) + (u^2 + 2b^2) f'(u) + u^2 f'^3(u) = 0.$$

Това е уравнение от тип уравнения на Бернули. Очевидното му решение $f(u) = const.$ води до хеликоид. Нека $f(u)$ не е константа, т.е. повърхнината не е хеликоид. Полагаме $y(u) = 1/f'^2(u)$ и уравнението приема вида

$$u(u^2 + b^2) y'(u) = 2(u^2 + 2b^2) y(u) + 2u^2.$$

Това линейно диференциално уравнение от първи ред има решение

(4) $$y(u) = u^2(Cu^2 - 1)/(u^2 + b^2).$$

Да забележим, че константата C трябва да е положителна, защото $y(u) = 1/f'^2(u)$ е положителна функция. Поради това можем да положим $C = 1/a^2$, $a > 0$ и решението (4) приема вида

$$y(u) = u^2(u^2 - a^2)/(a^2(u^2 + b^2)).$$

Оттук при $u > 0$ за производната на функцията $f(u)$ получаваме

$$f'(u) = a/u\sqrt{(u^2 + b^2)/(u^2 - a^2)}.$$

Следователно повърхнината (3) има вида

(5) $$S: \quad \mathbf{x}(u,v) = (u\cos v, u\sin v, a\int \frac{\sqrt{u^2+b^2}}{u^2-a^2}\frac{du}{u} + bv).$$

За интеграла I в горното уравнение имаме (с точност до константа)

$$I = \frac{b}{2a}\arctan\left(\frac{b^2u^2 - a^2(u^2+2b^2)}{2ab\sqrt{u^2-a^2}\sqrt{u^2+b^2}}\right) + \frac{1}{2}\ln\left(2u^2 - a^2 + b^2 + 2\sqrt{u^2-a^2}\sqrt{u^2+b^2}\right).$$

С това семейството минимални обобщени хеликоиди е определено. Сега да видим граничните случаи. Тъй като

$$\lim_{a\to 0}(aI + bv) = \frac{|b|\pi}{4} + bv$$

то при $a \to 0$ повърхнината от семейството (5) клони към хеликоида

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}(u,v) = (u\cos v, u\sin v, \frac{|b|\pi}{4} + bv).$$

От друга страна при $b \to 0$ имаме

$$\lim_{b\to 0}(aI + bv) = 1/2a\ln\left(2u^2 - a^2 + 2u\sqrt{u^2-a^2}\right) = a\ln(u + \sqrt{u^2-a^2})$$

и значи сега повърхнината клони към катеноида

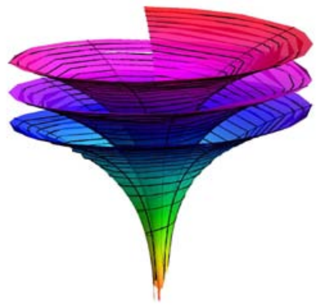
$$\mathbf{x} = \mathbf{x}(u,v) = \left(u\cos v, u\sin v, a\ln(u + \sqrt{u^2-a^2})\right).$$

На Фиг. 1 - Фиг. 6 са представени някои частни случаи на получените минимални обобщени хеликоиди. Именно на Фиг. 1 е изобразен хеликоид, след което на Фиг. 2-5 виждаме постепенното отдалечаване от хеликоид и приближаване до катеноид, една част от който е показана на Фиг. 6.

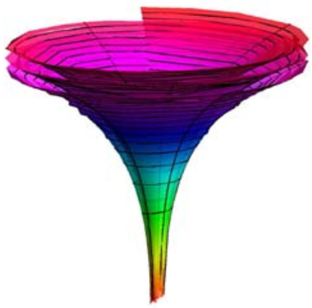
Фиг. 1.

Фиг. 2.

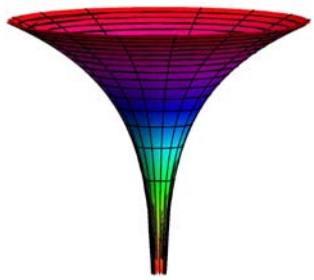
Фиг. 3.



Фиг. 4.



Фиг. 5.



Фиг. 6.

На чертежите се виждат и съответните начални меридианни линии, които се променят постепенно от права при хеликоида на Фиг. 1 до верижна линия при катеноида на Фиг. 6.

Литература

[1] Eisenhart L., A Treatise on the Differential Geometry of Curves and Surfaces. Ginn and company, Boston, New York, Chicago, London, 1909.
[2] Euler, L., Methodus inveniendi lineas curvas maximi minimive proprietate gaudentes sive solutio problematis isoperimetrici latissimo sensu accepti, Opera omni (1) 24, F'ussli Turici, Lausanne, 399-406, 1952 (englsh translation).
[3] Gray A., Abbena E., Salomon S., Modern Differential Geometry of Curves and Surfaces with MATHEMATICA. Boca Raton, FL: CRC Press.
[4] Meusnier, J.B., Mémiore sur la courbure des surfaces. Mémoires des savans étrangrs 1, 477-510, 1776.
[5] Xu, G., Wang, G., Quintic parametric polynomial minimal surfaces and their properties. Differential Geom. Appl. 28, 697–704, 2010.

MINIMAL GENERALIZED HELICOIDS

Ognian Kassabov
okassabov@vtu.bg

Todor Kableshkov University of Transport
158 Geo Milev Str., 1574 Sofia,
BULGARIA

Key words: *minimal surface, generalized helicoid.*

Abstract. *The generalized helicoids are surfaces that include the standart helicoids as well as all surfaces of revolution. A differential equation equivalent to the condition for a geleralized helicoid to be a minimal surface is obtained. When one of the constants in the solution tends to zero the solution of this equation tends to the classical helicoids or classical catenoids.*