

## ТЕОРИЯ НА ЕЛЕКТРОМАГНИТНИЯ ХИСТЕРЕЗИС

Данаил Йовчев Данаилов  
[dvd52@abv.bg](mailto:dvd52@abv.bg)

*ВТУ „Тодор Каблешков“, катедра ЕФ,  
ул. Гео Милев 158, гр. София  
БЪЛГАРИЯ*

*Ключови думи:* трансформатори, магнитни вериги, хистерезис, преходни процеси, нелинейни вериги

*Резюме:* Известно е, че хистерезисните процеси са недостатъчно добре изучени. По проблема работят много автори от целия свят. Протичането на хистерезисния процес все още не е намерило задоволително теоретично обяснение. Това се отнася както за линейна, така и за нелинейна магнитна характеристика  $B = g(H)$ . Реално процесът протича не по-магнитната характеристика, а по хистерезисни цикли, чиито траектории са функция на основната магнитна крива, но зависят и от скоростите на изменение на индукцията  $B$  и интензитета  $H$ , както и от активните съпротивления на магнитния материал  $R_f$  и на намотката  $R_w$ . Предлага се модел отчитащ тези фактори, който отразява реално протичащите процеси.

### 1. ВЪВЕДЕНИЕ

Трябва да се има в предвид, че електромагнитният хистерезис не може да се разглежда самостоятелно, като чисто магнитно проявление, а в тясна връзка с причината за неговото възникване, а именно намотката която възбужда магнитното поле. Съществуват корелационни зависимости между електромагнитните величини, които са нелинейни и при линейна магнитна характеристика. Емперично е доказано влиянието на  $R_f$  и  $R_w$  върху характера на процеса, но няма сериозно теоретично обяснение за това. Допуска се, че отчитането на хистерезисните явления не оказва съществено влияние на точността на изчисленията, защото хистерезисните криви почти съвпадат с основната магнитна крива  $B = g(H)$ . Това не е така, особено в случаите на нелинейна магнитна крива и в условията на преходен режим. Съществуват изследвания от редица автори за процеса [1,2,3,4,5,7,8,9] от началото на миналия век до наши дни без окончателно решение на проблема. В настоящата работа по преценка на авторът се представя математичен модел, който достатъчно добре отразява въпросното явление.

### 1. МАТЕМАТИЧЕН МОДЕЛ

Трудностите за математическо моделиране на процеса идват от това, че предварително е известно само захранващото напрежение от вида:

$$(1) \quad u_p(t) = U_{pm} \cos(\omega t + \psi_u),$$

и основната магнитна крива  $B = g(H)$ . По същество тя дава зависимостта между амплитудните стойности  $B_m$  и  $H_m$ . Развитието на хистерезисния процес се описва с моментните стойности на индукцията  $b(t)$  и интензитета  $h(t)$ . Те само в определен момент съвпадат с  $B_m$  и  $H_m$ . Тяхното определяне е трудно, защото  $R_f$  и  $R_w$ , които са в корелационна зависимост, изместват фазово  $b(t)$  и  $h(t)$  във всеки момент от времето  $t$ , при което се променят и техните амплитуди  $B_m$  и  $H_m$ . Когато  $B = g(H)$  е нелинейна,  $b(t)$  и  $h(t)$  допълнително се деформират и не са периодични несинусоидални функции. При тази ситуация определящи за хистерезисния процес са  $\frac{dh}{dt}$  и  $\frac{db}{dt}$  [ 6 ], които също се променят по периодичен несинусоидален закон. Последното се отнася за установен режим. При преходен режим  $b(t)$  и  $h(t)$  са непериодични величини, които след затихване на аperiодичните компоненти стават периодични.

За моментните стойности на напреженията са валидни следните зависимости:

$$(2) \quad u_B = u_p - iR_w - iX_{L_s};$$

$$(3) \quad u_B = s w \frac{db}{dt} = -e_L;$$

$$(4) \quad \frac{db}{dt} = \frac{u_p - i(R_w + X_{L_s})}{s w} = \frac{u_p - i(R_w + \omega L_s)}{s w} = \frac{u_p - u_a - u_s}{s w} = \frac{u_B}{s w};$$

$$(5) \quad b = \int \frac{u_B}{s w} dt = - \int \frac{e_L}{s w} dt,$$

а за моментните стойности на токовете :

$$(6) \quad i - (i_H + i_s) = i - (hl + \frac{u_s}{\omega L_s}) = i_\mu;$$

$$(7) \quad h = \frac{i - i_\mu - \frac{u_s}{\omega L_s}}{l} = \frac{\left( \frac{i\omega L_s - i_\mu \omega L_s - u_s}{\omega L_s} \right)}{l} = \frac{i_H}{l}.$$

Резултантният хистерезисен ток зависи от съпротивлението на магнитния материал  $R_f$  т.е.

$$(8) \quad i_H = hl = \frac{u_B}{R_f} \quad \text{или} \quad h = \frac{u_B}{R_f l}.$$

Тогава за моментната статична магнитна проницаемост  $\mu_c(t)$ , в предвид (5) и (8) се получава:

$$(9) \quad \mu_c(t) = \frac{b(t)}{h(t)} = \frac{\int \frac{u_B}{sw} dt}{\frac{u_B}{R_f l}} = \frac{\int u_B dt}{u_B} R_f \frac{l}{sw}, \text{ или}$$

$$(10) \quad b(t) = \mu_c h(t) = \left( \frac{\int u_B dt}{u_B} R_f \frac{l}{sw} \right) h(t) .$$

Замества се  $u_B$  от (2) и се получава :

$$(11) \quad b(t) = \mu_c h(t) = \left( \frac{\int (u_p - iR_w - iX_{Ls}) dt}{u_p - iR_w - iX_{Ls}} R_f \frac{l}{sw} \right) h(t)$$

Последната зависимост отразява развитието на хистерезисния процес във функция от времето.

Аналогична зависимост може да бъде изведена и за изменението на скоростите  $\frac{db}{dt}$  и  $\frac{dh}{dt}$  при еволюцията на хистерезисния процес . Ако се диференцира (5) и (8) се получава:

$$(12) \quad \frac{db}{dt} = \frac{u_B}{sw} \text{ и}$$

$$(13) \quad \frac{dh}{dt} = \frac{d \frac{u_B}{R_f l}}{dt} .$$

Тогава за моментната диференциална магнитна проницаемост  $\mu_d(t)$  , в предвид (12) и (13) се получава:

$$(14) \quad \mu_d = \frac{\frac{db}{dt}}{\frac{dh}{dt}} = \frac{\frac{u_B}{sw}}{\left( \frac{d \frac{u_B}{R_f l}}{dt} \right)} = \frac{u_B}{\frac{du_B}{dt}} R_f \frac{l}{ws}, \text{ или}$$

$$(15) \quad \frac{db}{dt} = \mu_d \frac{dh}{dt} = \left( \frac{u_B}{\frac{du_B}{dt}} R_f \frac{l}{ws} \right) \frac{dh}{dt} ;$$

Замества се  $u_B$  от (2) и се получава

$$(16) \quad \frac{db}{dt} = \mu_d(t) \frac{dh}{dt} = \left( \frac{u_p - iR_w - iX_{Ls}}{d(u_p - iR_w - iX_{Ls})} R_f \frac{l}{ws} \right) \frac{dh}{dt}.$$

Изразите (11) и (16) показват от какво зависи хистерезисния процес.

Приети са следните означения на величините:

- $b$  - хистерезисна индукция,  $T$  ;
- $h$  - хистерезисен интензитет,  $A/m$  ;
- $u_B$  - резултатно хистерезисно напрежение,  $V$  ;
- $u_a$  - активен пад на напрежение в намотката,  $V$  ;
- $u_s$  - реактивен пад на напрежение в намотката,  $V$  ;
- $i$  - токът в намотката,  $A$  ;
- $i_a$  - активна компонента на тока,  $A$  ;
- $i_s$  - реактивна компонента на тока, свързана с магнитния поток на разсейване,  $A$  ;
- $i_\mu$  - намагнитващият ток,  $A$  ;
- $i_h$  - резултатен хистерезисен ток,  $A$  ;
- $L_s$  - индуктивност на разсейване на намотката,  $H$  ;
- $R_f$  - съпротивление на магнитния материал,  $\Omega$  ;
- $R_w$  - съпротивление на намотката,  $\Omega$  ;
- $\mu_d$  - диференциална магнитна проницаемост;
- $\mu_c$  - статична магнитна проницаемост,  $H/m$  ;
- $\omega$  - кръгова честота;
- $s$  - сечение на магнитопровода,  $m^2$  ;
- $w$  - брой навивки на намотката;
- $l$  - дължина на средната силова линия,  $m$  .

Може да се разгледат два идеализирани случая за който се приема, че  $R_f = \infty$ ,  $L_s = 0$   $w = l = s = 1$ . Допуска се, че магнитната характеристика  $B_m = g(H_m)$  е линейна.

#### 1.случай

Нека  $R_w = 0$ . Тогава  $i(t)$  е чисто реактивен ток и изостава спрямо  $u_p(t)$  на ъгъл  $\pi/2$ , защото липсва активна компонента, която да предизвика ъгъла на дефазирание между радиус векторите  $\vec{U}_{pm}$  и  $\vec{I}_{rm}$  да е по-малък от  $\pi/2$ . В този случай радиус векторите  $\vec{U}_{pm}$  и  $\vec{B}_m$  са във фаза по отношение на времето, но се явяват дефазирани в

пространството на ъгъл  $\pi/2$ . Отношението на техните амплитуди  $\frac{U_{pm}}{B_m} = cons. = 1$ .

Радиус векторите  $\vec{H}_m$  и  $\vec{B}_m$  са във фаза както по отношение на времето, така и по

отношение на пространството.  $\frac{B_m(t)}{H_m(t)} = \frac{U_{pm}(t)}{H_m(t)} = \mu_c$ . Ако  $u_{pm}(t)$  се изменя по косинусоидален закон, то  $b(t) = B_m(t) \cos \omega t$  и  $h(t) = H_m(t) \cos \omega t$  също ще се изменят по този начин. При това отношението

$$(17) \quad \frac{b(t)}{h(t)} = \frac{B_m(t) \cos \omega t}{H_m(t) \cos \omega t} = \mu_c(t) = \text{const.},$$

където:

$\mu_c(t)$  - моментната статична магнитна проницаемост;

Аналогично е ситуацията и по отношение на скоростите на  $b(t)$  и  $h(t)$ :

$$(18) \quad \frac{db}{dt} = -\omega B_m(t) \sin \omega t = -B_m^d(t) \sin \omega t;$$

$$(19) \quad \frac{dh}{dt} = -\omega H_m(t) \sin \omega t = -H_m^d(t) \sin \omega t$$

или

$$(20) \quad \frac{\frac{db}{dt}}{\frac{dh}{dt}} = \frac{-\omega B_m(t) \sin \omega t}{-\omega H_m(t) \sin \omega t} = \mu_d(t) = \mu_c(t) = \text{const.},$$

където

$\mu_d(t)$  - моментна диференциална магнитна проницаемост.

Диференцирането в (18) и (19) е извършено при условие, че  $B_m(t)$  и  $H_m(t)$  са постоянни величини.

Ако се начертаят графиките на  $b(t)$  и  $h(t)$  те ще са две косинусоиди с фазова разлика  $\varphi = 0$ . Графиките на  $\frac{db}{dt}$  и  $\frac{dh}{dt}$  ще са две синусоиди с фазова разлика  $\varphi = 0$ , а първите ще изпреварват вторите на  $\frac{\pi}{2} \text{ rad}$ . Ако се дефазира  $b(t)$  на ъгъл  $+\frac{\pi}{2}$  спрямо  $h(t)$  и с намерените стойности  $b(t_i)$  и  $h(t_i)$  се построи  $b = f(h)$  в координатната система  $B/H$ , тя ще бъде права линия, като

$$(21) \quad \mu_c(t) = \frac{b(t)}{h(t)} = \text{const.}; \quad \alpha_c(t) = \text{arctg } \mu_c(t);$$

$$(22) \quad \mu_d(t) = \frac{\frac{db}{dt}}{\frac{dh}{dt}} = \text{const.}; \quad \alpha_d(t) = \text{arctg } \mu_d(t).$$

Правите  $\mu_c(t)$  и  $\mu_d(t)$  ще пресичат в началото на координатната система  $B/H$  и ще са дефазирани на  $\frac{\pi}{2}$ .  $\mu_c(t)$  ще е разположена в I и III квадрант,  $\mu_d(t)$  в II и IV квадрант.

Може да се запише:

$$(23) \quad \frac{\frac{db}{dt}}{b} = \frac{-\omega B_m(t) \sin \omega t}{B_m(t) \cos \omega t} = \frac{\frac{dh}{dt}}{h} = -\omega \text{tg } \omega t.$$

От казаното до тук следва, че когато  $R_w = 0$  (при  $R_f = \infty$ ) е невъзможно да съществува хистерезис и активните загуби в намотката  $p_w(t) = 0$ , както и  $p_f(t) = 0$ .

## 2.случай

Нека  $0 < R_w = \text{cons.} < \infty$

В този случай радиус векторите  $\vec{U}_{pm}(t)$  и  $\vec{I}_m(t)$  се разлагат на активни и реактивни компоненти, като:

$$(24) \quad \vec{U}_{pm}(t) - \vec{U}_{pm}^a(t) = \vec{U}_{pm}^r(t)$$

$$(25) \quad \vec{I}_m(t) - \vec{I}_m^a(t) = \vec{I}_m^r(t)$$

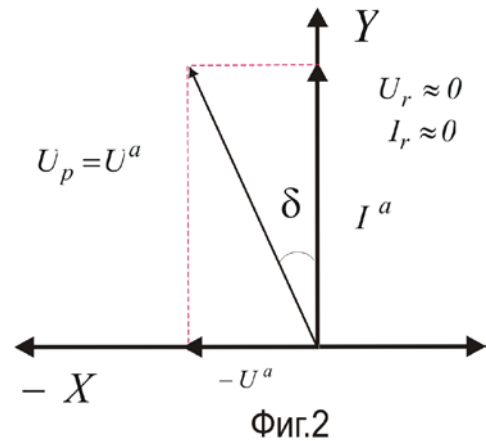
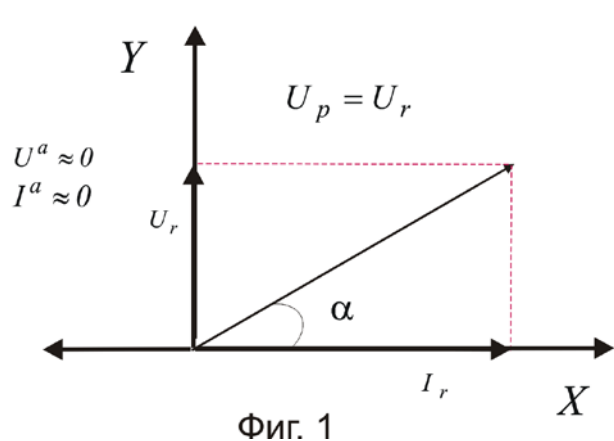
Показано е как се изменят активните и реактивни компоненти за два характерни случая при условие  $l = s = w = 1$ .

Когато  $u_p(t) = U_{pm}$ ,

$$(26) \quad \vec{U}_m(t) = \vec{B}_m(t) = 0 \quad \text{и} \quad \vec{I}_m(t) = \vec{H}_m(t) = 0, \text{ (фиг.1) и}$$

(27)

$$X_w(t) = \omega_0 L = \frac{\vec{U}_{pm}(t) - \vec{U}_{pm}^a(t)}{\vec{I}_m(t) - \vec{I}_m^a(t)} = \frac{\vec{U}_{pm}^r(t)}{\vec{I}_m^r(t)} = \frac{\vec{B}_m(t) - \vec{B}_m^a(t)}{\vec{H}_m(t) - \vec{H}_m^a(t)} = \frac{\vec{B}_m^r(t)}{\vec{H}_m^r(t)} = \mu_c(t).$$



При  $u_p(t) = 0$ ,  $\vec{U}_m = \vec{B}_m = 0$  и  $\vec{I}_m = \vec{H}_m = 0$ , (фиг.2) са валидни следните векторни равенства:

$$(28) \quad \vec{R}'_w(t) = \frac{\vec{U}_{pm}(t)}{\vec{I}_m(t)} = \frac{\vec{U}^a_{pm}(t)}{\vec{I}^a_m(t)} = \frac{\vec{B}^a_m(t)}{\vec{H}^a_m(t)} = \vec{r}_w(t),$$

където:

$\vec{R}'_w(t)$  - радиус векторът на приведеното активно съпротивление на намотката:

$$(29) \quad \vec{Z}_w(t) = \sqrt{\vec{R}_w^2(t) + \vec{X}_w^2(t)} = \sqrt{r_w^2(t) + \mu_c^2(t)} = z_w(t);$$

$$(30) \quad \vec{X}'_w(t) = \frac{\vec{U}_{pm}(t)}{\vec{I}_m(t)} = \frac{\vec{U}^r_{pm}(t)}{\vec{I}^r_m(t)} = \frac{\vec{B}^r_m(t)}{\vec{H}^r_m(t)} = \vec{\mu}_c(t);$$

$$(31) \quad \vec{I}_m(t) = \frac{\vec{U}_{pm}(t)}{\vec{Z}_w(t)} = \frac{\vec{B}_m(t)}{z_w \mu_c(t)} = \vec{H}_m(t).$$

От каталожната крива  $B = g(H)$  се определя:

$$(32) \quad \alpha_0 = \arctg \frac{B_m}{H_m} = \arctg \mu_{c0} = \arctg \frac{U_{pm}}{I_m} = \arctg X_w.$$

Моментната реактивната компонента на  $u_p(t)$  е:

$$(33) \quad u_p^r(t) = U_{pm} \cos \omega t \cos \mu_c.$$

Моментната активната компонента:

$$(34) \quad u_p^a(t) = U_{pm} \cos \omega t \sin \mu_c.$$

Приведеното активно съпротивление на намотката:

$$(35) \quad R'_w(t) = \frac{u_p^a(t)}{i^a(t)} = \frac{U_{pm} \cos(\omega t + \psi_u) \sin \mu_c}{I_m \cos(\omega t + \psi_u) \sin \mu_c} = r_w(t)$$

$r_w$  - приведеното активно съпротивление на магнитната система

$$(36) \quad \delta(t) = \arctg \frac{u_p^a(t)}{i^a(t)} = \arctg R_w(t) = \arctg \frac{b^a(t)}{h^a(t)} = \arctg r_w(t)$$

Въвежда се приведеното реактивно съпротивление на намотката:

$$(37) \quad X'_w(t) = \frac{u_p^r(t)}{i^r(t)} = \frac{U_{pm} \cos(\omega t + \psi_u) \cos \mu_c}{I_m \cos(\omega t + \psi_u) \cos \mu_c} = \mu_c(t)$$

$$(38) \quad \alpha(t) = \arctg \frac{u_p^r(t)}{i^r(t)} = \arctg X_w(t) = \arctg \frac{b^r(t)}{h^r(t)} = \arctg \mu_c(t)$$

От производните (40) се намира -  $X_w(t)$

$$(39) \quad \frac{\frac{db}{dt}}{\frac{dh}{dt}} = \frac{-\omega B_m(t) \sin \omega t}{-\omega H_m(t) \sin \omega t} = \mu_d(t) = \mu_c(t)$$

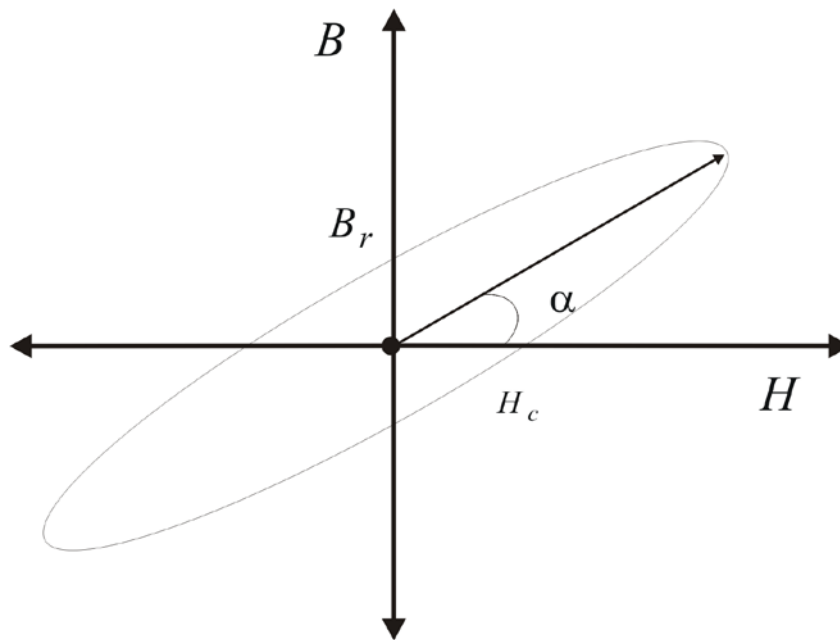
$$(40) \quad \frac{\frac{du_p}{dt}}{\frac{di}{dt}} = \frac{\frac{d(U_{pm}(t) \cos \omega t)}{dt} - \omega U_{pm}(t) \sin \omega t}{\frac{d(I_m(t) \cos \omega t)}{dt} - \omega I_m(t) \sin \omega t}} = X_w(t) = \mu_d(t) = \mu_c(t)$$

1

$$(41) \quad \frac{\frac{du_p}{dt}}{\frac{di}{dt}} = \frac{\frac{db}{dh}}{\frac{db}{dt}} = X_w(t) = \mu_c(t) \frac{db}{b} = -\omega t g \omega t$$

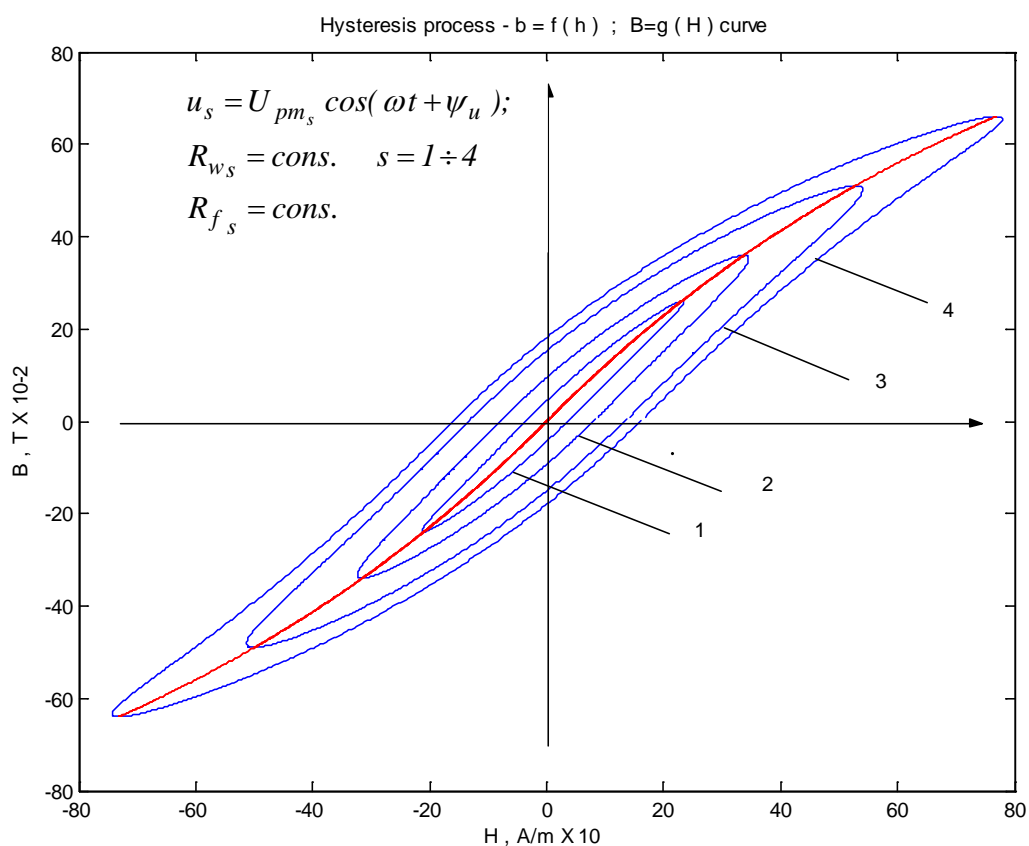
Горните зависимости описват симетричен хистерезисен цикъл при линейна магнитна характеристика (фиг.3)

С получените зависимости е създаден програмен продукт на програмен език “MatLab” за изчертаване на симетрични хистерезисни цикли. На фиг.(4) е изчертано семейство от хистерезисни цикли при  $R_w = cons.$  и захранващи напрежения  $u_p(t)$  с различни амплитуди .



Фиг. 3





фиг. 4

## ЛИТЕРАТУРА

- [1] Madelung, E. , “*Über Magnetisierung durch schnellverlaufende Ströme und die Wirkungweise der Rutherford-Markoni Magnetodetektors*”, Ann. Phys. 17, **No.5**, 861-863., 1905
- [2] Preisach, F. , Z. Phys., Vol 94, p. 277, 1935
- [3] Y.Q.Ni, J.M.Ko and C.W.Wong “*Nonparametric Identification of Nonlinear Hysteretic Systems*” *Journal of Engineering Mechanics*”, Vol. 125, No. 2, pp. 206-215, Feb. 1999
- [4] Visone C., Serpiko C., Mayergouz I. D., Huang W., and Adly A., A., “*Neural – Preisach –type models and their application to the identification of magnetic hysteresis from noisy data*”, Physica B, vol. 275, pp. 223-227, 2000
- [5] Carnevale D., Nicosia S. and Zaccarian L., “*Generalized Constructive Model of Hysteresis*”, IEEE Trans. Magn., Vol.42, № 12 , 2006 Junho Song, Armen Der Kiureghian, “*Generalized Bouc–Wen Model for Highly Asymmetric Hysteresis*” J. Eng. Mech., 132(6), 610–618. June, 2006
- [6] Kollar M., “*The Preisach model ( 1935 ) presented in 2007.,?...*”, pp.154-165, Sozopol, Bulgaria, 2007 y.
- [7] Ikhouane, F., Pozo, F. and Acho, L., “*Discussion of “Generalized Bouc–Wen Model for Highly Asymmetric Hysteresis” by Junho Song and Armen Der Kiureghian.*”, J. Eng. Mech., 134(5), 438–439. 2008

[8] Nová Ivana, Zemánek Ivan, “Analytical Model With Flexible Parameters For Dynamic Hysteresis Loops Modelling”, Journal of Electrical Engineering, Vol 61. No 7/S, 46-49, 2010

[9]Richard P. Clarke , “Non-Bouc Degrading Hysteresis Model for Nonlinear Dynamic Procedure Seismic Design”, Journal of Structural Engineering, Vol. 131, No.2, pp. 287-291, Feb 2005 ; Online Publication Date: 29 Feb, 2012

## ELECTROMAGNETIC HYSTERESIS THEORY

DANAIL YOVCHEV DANAILOV

[dyd52@abv.bg](mailto:dyd52@abv.bg)

*Todor Kableshkov University of Transport, Chair of Electrical  
Engineering and Physics,  
158 Geo Milev Street, Sofia,  
BULGARIA*

**Key words:** *transformers, magnetic circuits, hysteresis, transient processes, nonlinear circuits*

**Abstract:** It is known that hysteresis processes have not been sufficiently well studied. Numerous authors from many countries have treated the topic. Yet, hysteresis process course has not been theoretically explained in a satisfactory way so far. This statement applies to the linear as well as to the nonlinear magnetic characteristic  $B = g(H)$ . The process, in reality, is not performed by magnetic characteristic, but by hysteresis loops, the trajectories of which are not only functions of basic magnetic curve, but they are also dependent on induction  $B$  alteration speeds and intensity  $H$ , as well as on ohmic resistances of magnetic material  $R_f$  and of coil  $R_w$ . A model, which takes into consideration these factors and presents performed in reality processes, has been suggested in the paper.