

## **МОДЕЛИРАНЕ И ИЗСЛЕДВАНЕ НА ОСЦИЛАТОР НА ДЮФИНГ ЧРЕЗ PSPICE**

**Елена Димкина, Галина Чернева**

[elena.dimkina@abv.bg](mailto:elena.dimkina@abv.bg), [g\\_cherneva@abv.bg](mailto:g_cherneva@abv.bg)

***Висше транспортно училище "Тодор Каблешков"***

***1574 София, ул. "Гео Милев" 158***

***БЪЛГАРИЯ***

***Ключови думи:*** осцилатор на Дюфинг, хаотичен атрактор, симулационен модел

***Резюме:*** Осцилаторът на Дюфинг представлява неавтономна динамична система със синусоидално входно въздействие. Математичен модел на тези осцилатори е нелинейно диференциално уравнение от втори ред с кубична нелинейна функция, известно в литературата като уравнение на Дюфинг. Тези уравнения моделират явления в различни сфери: физика, биология, икономика и др.

Уравнението на Дюфинг може да бъде математичен модел и на редица нелинейни електрически вериги, чийто нелинеен елемент се описва с функция от трети ред. Коефициентите на уравнението зависят от параметрите на веригата, така че видът на решението му се определя също от тях. В зависимост от параметрите на елементите могат да се получат периодични, псевдопериодични или хаотични решения.

В настоящата работа е изследвана електрическа верига, описана със система от две нелинейни диференциални уравнения от първи ред, еквивалентна на уравнението на Дюфинг. Веригата съдържа кръг за обратна връзка, състоящ се от резистор и два диода, чрез който се въвежда нелинейната функция в уравнението. За изследване на веригата е създаден симулационен модел в PsPice. Чрез него са симулирани процесите във веригата и е изследвано как се изменя характерът им в зависимост от параметрите ѝ. Получени са различни фазови портрети и са направени изводи при какви параметри се постига двоен хаотичен атрактор.

### **ВЪВЕДЕНИЕ**

Математичен модел на осцилатора на Дюфинг е нелинейно диференциално уравнение от втори ред с кубична нелинейна функция, известно в литературата като уравнение на Дюфинг [1,2]. Това уравнение описва хаотично поведение, без да е свързано с определен физичен обект или система. То може да моделира явления във физиката, биологията, икономиката и др.

Уравнението на Дюфинг е математичен модел и на нелинейни електрически вериги със синусоидално входно въздействие, чийто нелинеен елемент се описва с функция от трети ред [2]. В някои от тях нелинейната характеристика се апроксимира с почастно линейна характеристика [3, 4], а в други [5, 7, 8, 9] кубичната функция се реализира чрез подходящи електронни схеми.

Настоящата работа представя симулационен модел, създаден в PsPice, на електрическа верига, описана със система от две нелинейни диференциални уравнения от първи ред, еквивалентна на уравнението на Дюфинг. Веригата съдържа операционен усилвател и кръг за обратна връзка, състоящ се от резистор и два паралелно свързани диода, чрез които се въвежда нелинейната функция в уравнението [5]. Получени са различни фазови портрети и са направени изводи при какви параметри се постига двоен хаотичен атрактор.

### СИМУЛАЦИОНЕН МОДЕЛ

Общият вид на уравнението на Дюфинг [1] е:

$$(1) \quad \ddot{x} + a\dot{x} - x + x^3 = A \sin \omega t,$$

където  $a$ ,  $A$  и  $\omega$  са параметри.

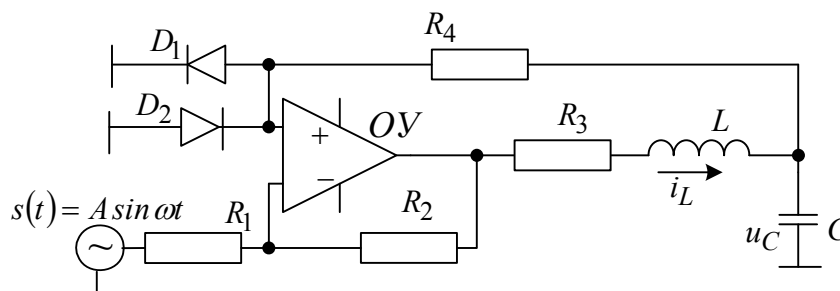
Представено като система от две уравнения от първи ред, (1) се записва във вида:

$$(2) \quad \begin{cases} \frac{dx}{dt} = y \\ \frac{dy}{dt} = F(x) - ay + A \sin \omega t \end{cases},$$

където

$$(3) \quad F(x) = x - x^3.$$

Сравнително лесна за реализация електрическа верига [5], която се описва с уравнения от вида (2), е показана на фиг.1.



Фиг.1

Съгласно законите на Кирхоф, за нея са в сила уравненията:

$$(4) \quad \begin{cases} \frac{du_C}{dt} = \frac{i_L}{C} \\ \frac{di_L}{dt} = \frac{1}{L} [f(u_C) - R_3 i_L + A \sin \omega t] \end{cases}.$$

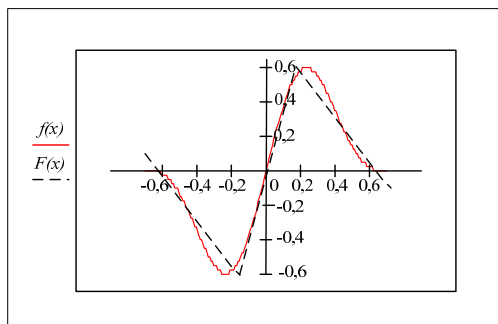
Може да се покаже [5], че уравнения (4) са идентични на уравнения (2). Кръгът за обратна връзка във веригата, състоящ се от резистор  $R_4$  и насрещно свързаните в паралел диоди  $D_1$  и  $D_2$ , води до зависимост:

$$(5) \quad f(u_C) = \begin{cases} -(u_C + kU_d), & u_C < -U_d \\ (k-1)u_C, & -U_d \leq u_C \leq U_d \\ kU_d - u_C, & u_C > U_d \end{cases},$$

където

$$(6) \quad k = \frac{R_2}{R_1} + 1,$$

$U_d$  - напрежение на диода в отпушено състояние.



Фиг.2

Ако се реализира

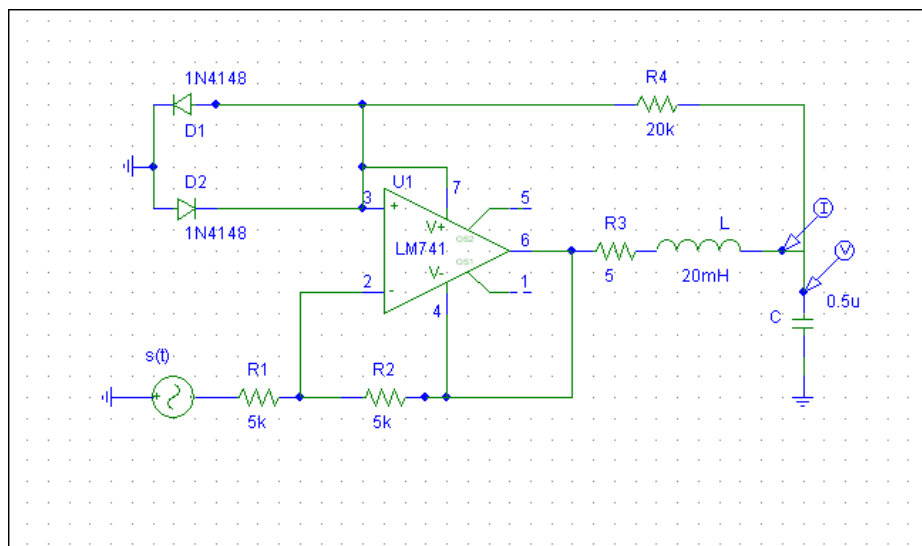
$$(7) \quad k = 2, \quad x = \frac{u_C}{2U_d},$$

зависимост (5) добива вида:

$$(8) \quad f(x) = \begin{cases} -(x+1), & x < -0,5 \\ x, & -0,5 \leq x \leq 0,5 \\ 1-x, & x > 0,5 \end{cases}$$

и може да се апроксимира с функция (3). Доказателство, че равновесните точки на двете функции съвпадат, са техните графични построения, дадени на фиг.2.

Симулационният модел на електрическата верига от фиг.1 е реализиран в PsPice и е показан на фиг.3.



Фиг.3

Първоначално зададените стойности на параметрите на елементите на веригата от фиг.3 са:

$$R_1 = R_2 = 5 \text{ k}\Omega; \quad R_3 = 5 \text{ }\Omega; \quad R_4 = 20 \text{ k}\Omega; \quad L = 20 \text{ mH}; \quad C = 0,5 \text{ }\mu\text{F}.$$

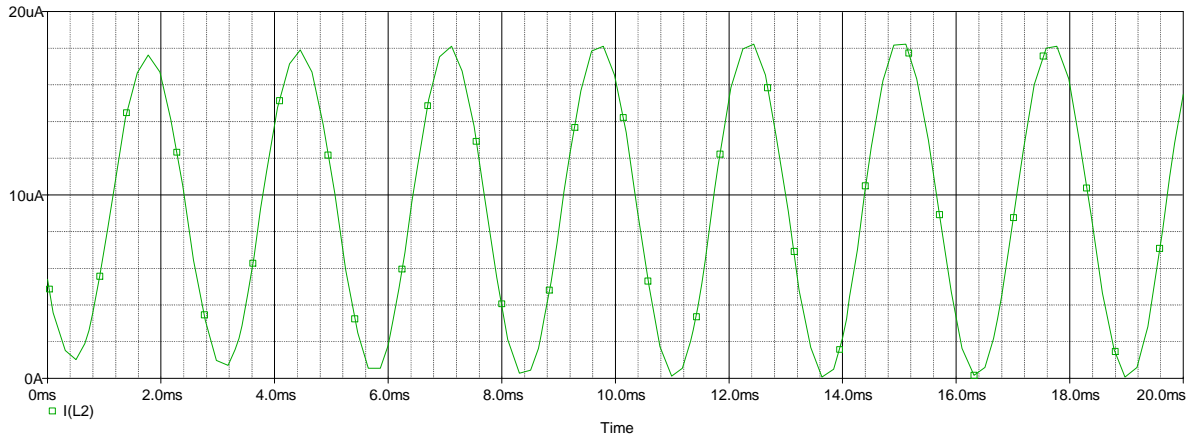
Операционният усилвател е LM741, а диодите са силициеви – тип 1N4148.

Веригата се захранва със синусоидално напрежение с амплитуда 1 V и честота 1500 Hz.

## РЕЗУЛТАТИ ОТ СИМУЛАЦИЯТА

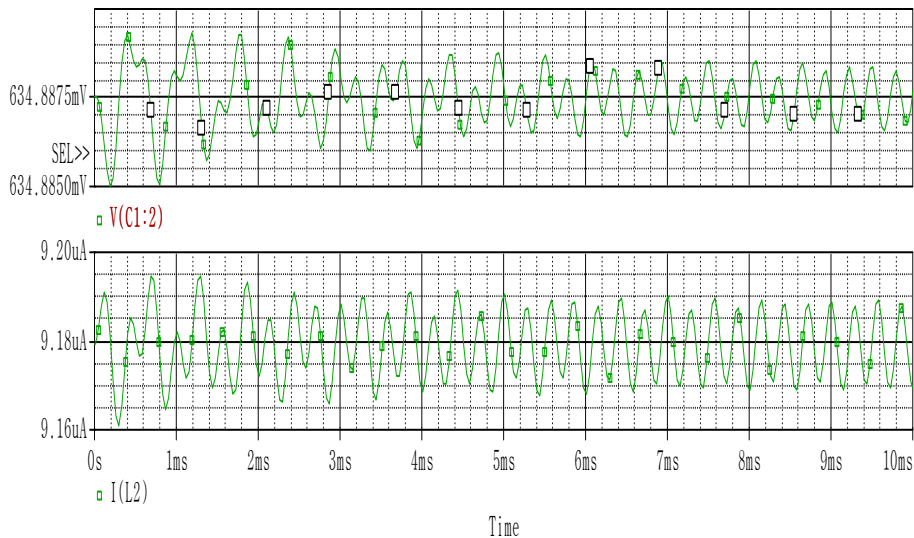
Целта на изследването е да се провери при какви условия се реализира хаотичен процес във веригата и какви бифуркации настъпват при промяна на параметрите ѝ.

От симулацията с параметрите от фиг.3 се вижда, че в този случай процесът е периодичен (фиг.4).

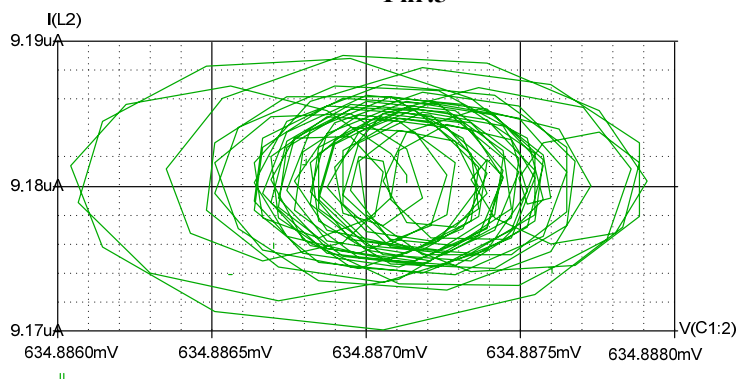


Фиг.4

При промяна на стойностите на  $R_1$  и  $R_2$  във веригата възниква хаотичен процес. На фиг. 5 е показано изменението на  $i_L$  и  $u_C$  при  $R_1 = R_2 = 6 \text{ k}\Omega$ . За същия случай е получен и фазовият портрет на процеса, даден на фиг.6.



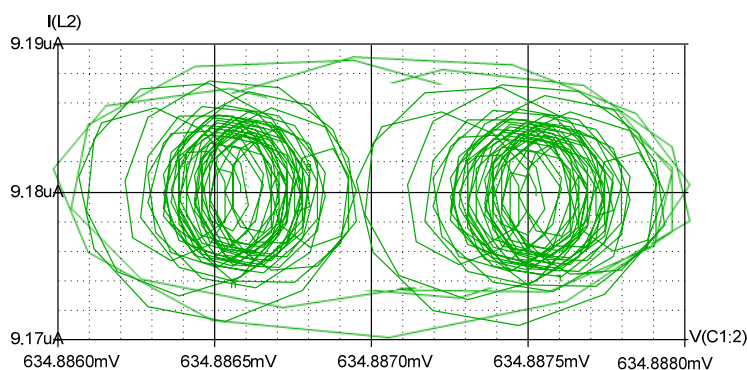
Фиг.5



Фиг.6

DS-62

При по-нататъшно изменение на  $R_1$  и  $R_2$  хаотичният атрактор става двоен (фиг.7 -  $R_1 = R_2 = 7 \text{ k}\Omega$ ).



Фиг.7

### ИЗВОДИ

В настоящата работа е предложен симулационен модел, създаден на PsPice, на електрическа верига, моделирана с уравнението на Дюфинг. Чрез направените симулации е установено как изменението на параметри от линейната част на веригата влияе върху процесите в нея. Настоящият симулационен модел може да се използва за изследване на свързани хаотични системи, с цел възможно приложение в комуникациите.

### ЛИТЕРАТУРА

- [1] Ueda Y., Survey of Regular and Chaotic Phenomena in Forced Duffing Oscillator, Y. Ueda. 1991.
- [2] Мартынова И.М. и О.Ю. Макаренко, Изучение уравнения Дуффинга при аппроксимации кубической нелинейности кусочно-нелинейной функцией, Вестник ВГУ, №3 - с. 201-202, 2003.
- [3] Murali K, The simplest dissipative nonautonomous chaotic circuit, IEEE Trans, Circuits Syst., Vol.41. – NewYork: IEEE Circuits and Systems Society, p.462-463, 1994
- [4] Namajunas A., Tamasevicius A, Simple RC Chaotic Oscillator, Electronics Letters, Vol. 32. No. 11. p. 945-946, 1996
- [5] Tamaseviciute E., A. Tamasevicius, G. Mykolaitis, S.Bumeliene, E. Lindberg, Analogue Electrical Circuit for Simulation of the Duffing-Holmes Equation, Nonlinear Analysis: Modelling and Control, Vol 13, №2, Vilnius University, p.241-252, 2008
- [6] Silva C.P., A.M. Young, High frequency an harmonic oscillator for the generation of broadband deterministic noise, U.S. Patent No.6, 127, 899, October 3, 2000
- [7] Silva C. P., A. M. Young, Implementing RF Broadband Chaotic Oscillators: Design Issues and Results, Proceedings of the IEEE International Symposium on Circuits and Systems. IEEE, Vol. 4, p. 489-493, 1998
- [8] Патрушева Т.В., Е. М. Патрушев, Простая электрическая модель генератора Дуффинга-Холмса, Ползуновский альманах, №.2, стр. 11-14, 2012
- [9] Leuciuc A., The Realization of Inverse System for Circuits Containing Nullors with application in Chaos Synchronization, Int. J. Circ. Theory Appl., Vol. 26, pp. 1-12, 1998

# MODELING AND TESTING OF DUFFING OSCILLATOR USING PSPICE

**Elena Dimkina, Galina Cherneva**  
[elena.dimkina@abv.bg](mailto:elena.dimkina@abv.bg), [g\\_cherneva@abv.bg](mailto:g_cherneva@abv.bg)

**Todor Kableshkov University of Transport,  
Sofia, 158 Geo Milev Str.,  
BULGARIA**

**Key words:** *Duffing oscillator, chaotic attractor, a simulation model*

**Abstract:** *Duffing oscillator is a non-autonomous dynamical system with sinusoidal entrance effects. Mathematical model of these oscillators is a nonlinear differential equation of second order with a cubic nonlinear function, known in the literature as an equation of Duffing. These equations modeling events in different fields: physics, biology, economics, etc.*

*The Equation of Duffing might be mathematical model in a number of nonlinear circuits, which a nonlinear element is described by a function of the third order. The coefficients of the equation depend on the parameters of the circuit, so that the type of equation's solution also determined by them. Depending on the parameters of the elements can be prepared periodical, pseudoperiodical or chaotic solutions.*

*In the current paper is tested a electrical circuit, witch is described with a system of two non-linear differential equations of first order. She is equivalent to the Duffing equation. The chain contains a circle to feedback relation, which is consisting of a resistor and two diodes. By circle to feedback relation introducing a non-linear function of the equation. For testing of the circuit is set up the simulation model in PsPice. Through this model are simulated processes in the chain and are examined how their character is amended according to the parameters of the chain. Its are received different phase portraits and have been conclusions under what parameters are obtained a dual chaotic attractor.*