Механика Транспорт Комуникации
Научно списание

ISSN 1312-3823
брой 2, 2007 г.
статия № 0085
http://www.mtc-aj.com

ОБЩА ТЕОРИЯ, МЕТОД ЗА АПРОКСИМАЦИЯ И ПРОЕКТИРАНЕ НА ЕЛЕКТРИЧЕСКИ ФИЛТРИ НА БАЗАТА НА ХАУСДОРФОВИ ПОЛИНОМИ

Петър Апостолов
p_apostolov@abv.bg

Институт за специална техника – МВР. София - 1799, бул. „ Ал. Малинов “, група „ Витоша “ п. к. 83, тел.: (+359-2) 988 47 05, факс: (+359-2) 77 41 00, България

Ключови думи: *апроксимация, полином, синтез, инверсен филтър, Хаусдорф, Чебишев, амплитудно честотна характеристика.*

Резюме: *В работата е разгледано приложение на хаусдорфова апроксимация в съвременната теория за синтез на електрически филтри. Определен е транслиран хаусдорфов полином, който води до реализуеми предавателни функции на електрически филтри. Показани са предавателни функции на хаусдорфов нискочестотен филтър-прототип и на два вида инверсни хаусдорфови филтри. Анализирани са честотните им характеристики.*

Увод

Апроксимацията на зададени спецификации за амплитудно-честотната характеристика (АЧХ) с цел получаване на реализуема предавателна функция е основен етап при проектирането на електрически филтри. Противоречивото поведение на линейните електрически вериги, изразяващо се във факта, че добрата филтрация (високата селективност на АЧХ) се съпровожда винаги с “лошо поведение” във времева област и лоши фазово-честотни характеристики (ФЧХ) и групово време на закъснение (ГВЗ), прави търсенето на “все по-добри” апроксимации (такива с по-добър баланс между висока селективност и приемливи фазови и импулсни изкривявания) един никога не свършващ процес. Тоталната цифровизация в последните години поставя още по-остро въпроса за намиране на нови апроксимации, намаляващи изкривяванията на импулсните и цифрови сигнали. Съществува и една фундаментална причина за перманентната актуалност на разработките на нови методи за апроксимация на зададена АЧХ –

филтри с правоъгълна АЧХ (каквато е всяка стандартна спецификация) никога не могат да бъдат реализирани, защото не се подчиняват на принципа за причинно-следствената връзка и затова винаги ще се търсят някакви приближения до тях.

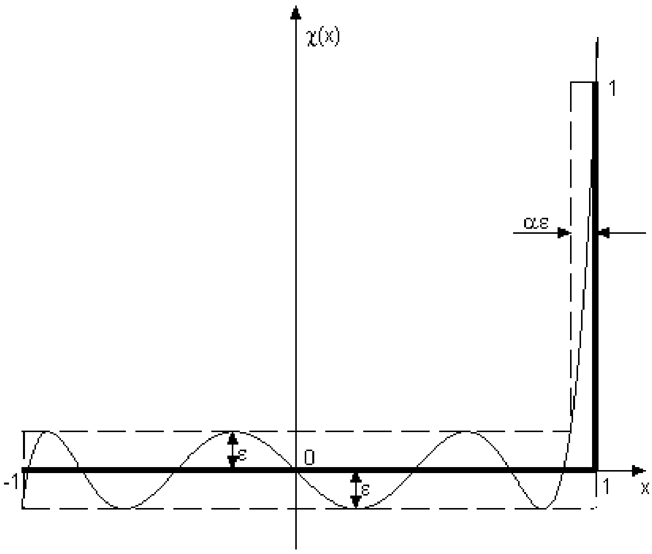
1. Апроксимация в хаусдорфова метрика. Образуване на предавателна функция на хаусдорфов нискочестотен филтър - прототип

През 80-те години на XX век в БАН, във връзка с изследване на ε-ентропията на пространството, е предложена нова апроксимация в хаусдорфова метрика [1]. Тя е прилагана успешно за синтез на антенни решетки с оптимална диаграма на насоченост в ТУ - София [2] и директен синтез на предавателни функции на цифрови филтри в БАН [3]. В теорията е предложен алгебричен полином, осъществяващ най-добро приближение на "отместена" делта-функция в хаусдорфова метрика

(1) $$P_n(x) = \varepsilon T_n\left(\frac{2x+\alpha\varepsilon}{2-\alpha\varepsilon}\right),$$

където ε е хаусдорфово разстояние, T_n е полином на Чебишев от първи род и степен n, α е параметър, а факторът (произведението) $\alpha\varepsilon$ дефинира широчината на лентата, в която полиномът апроксимира "отместената" делта-функция в точката 1, където тя има безкрайна стръмност (Фиг.1). Връзките между параметрите на полинома се определят от равенството [4]

(2) $$\alpha\varepsilon = 2\frac{\mathrm{ch}\left[\frac{1}{n}\mathrm{Ach}\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)\right]-1}{\mathrm{ch}\left[\frac{1}{n}\mathrm{Ach}\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)\right]+1}.$$



Фиг.1. Апроксимация на "отместена" делта функция с хаусдорфов полином

От фигурата се вижда, че хаусдорфовият полином апроксимира функция, която има контур на характеристична функция на филтър. Лентата на пропускане се определя в интервала $[0,1-\alpha\varepsilon]$, а лентата на задържане в интервала $(1-\alpha\varepsilon,\infty)$. Като се имат предвид равенство (2) и Фиг.1, в дефинираната област са в сила неравенствата:

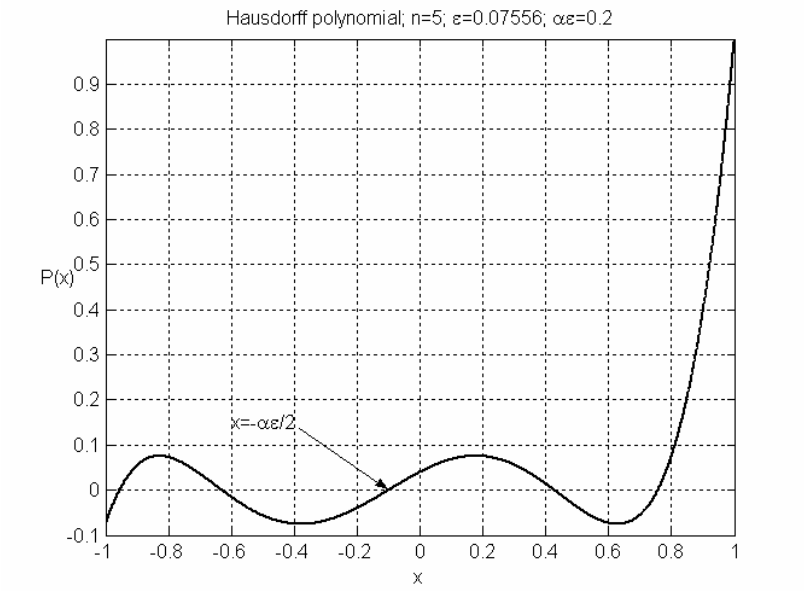
(3) $$0<\varepsilon<1 \text{ и } 0<\alpha\varepsilon<1.$$

Представянето на полинома в явен вид като рационална функция на аргумента си става посредством коефициентите на полиномите на Чебишев. Хаусдорфов полином от пета степен ще има вида

(4) $$P_5(x)=\varepsilon\left[16\left(\frac{2x+\alpha\varepsilon}{2-\alpha\varepsilon}\right)^5-20\left(\frac{2x+\alpha\varepsilon}{2-\alpha\varepsilon}\right)^3+5\frac{2x+\alpha\varepsilon}{2-\alpha\varepsilon}\right].$$

На Фиг.2 е показана графиката на полинома за стойности на $\varepsilon=0.07556$ и $\alpha\varepsilon=0.2$. Вижда се, че ако в (4) се заместят ε и $\alpha\varepsilon$ с техните стойности, след степенуване, разкриване на скобите и извършване на приведение, хаусдорфовият полином може да се представи като рационална функция на аргумента си.

(5) $$P_5(x)=2.04738\,x^5+1.02369x^4-1.86824x^3-0.601419x^2+0.358612x+0.0399253.$$



Фиг.2. Хаусдорфов полином: $n=5$; $\varepsilon=0.07556$; $\alpha\varepsilon=0.2$

От теорията се знае, че предавателната функция на нискочестотен филтър е дробно-рационална. За да бъде реализуема, е необходимо полиномът в знаменателя да бъде стриктен полином на Хурвиц. При образуване на предавателна функция на нискочестотен хаусдорфов филтър-прототип с полинома (4) не се получават реализуеми предавателни функции за всяко $\alpha\varepsilon$ [4]. Това се дължи на обстоятелството, че хаусдорфовият полином (4) е нито четна, нито нечетна функция на аргумента си, което се вижда от (5) и Фиг.2. Графиката на полинома е несиметрична относно началото на координатната система. Изследванията показаха, че за стойност на аргумента $x=-\alpha\varepsilon/2$, хаусдорфовите полиноми имат характерна точка. Корен, когато полиномът е от нечетна степен (Фиг.2) и локален екстремум, когато е от четна степен. Ако се извърши транслация в положителна посока със стойност $\alpha\varepsilon/2$ се получава транслиран полином, който води до реализуеми предавателни функции

(6) $$P_n^T(x)=\varepsilon T_n\left(\frac{2x}{2-\alpha\varepsilon}\right)=\varepsilon T_n\left(\frac{x}{1-\alpha\varepsilon/2}\right).$$

В [4] е доказано, че транслираният полином представлява единствено и най-добро приближение на "отместена" делта функция, транслирана с $\alpha\varepsilon/2$ в положителна посока, в хаусдорфова метрика.

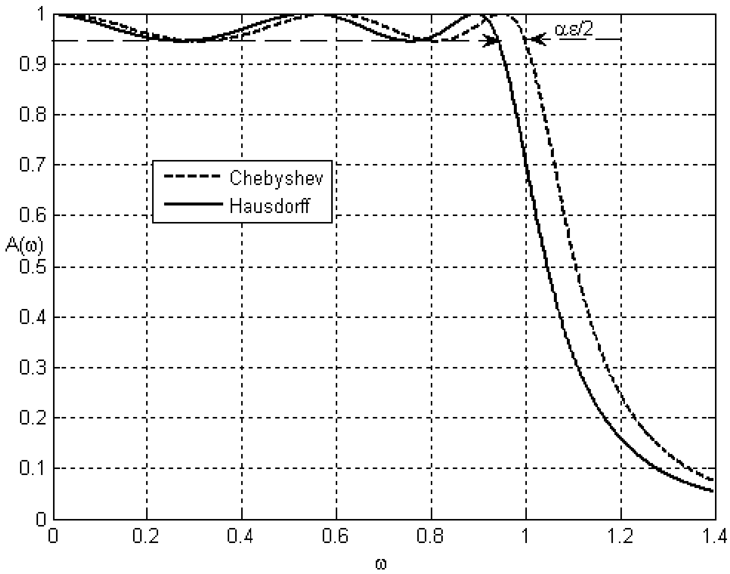
Квадратът на модула на предавателната функция на нискочестотен хаусдорфов филтър-прототип има вида

$$|A_n|^2(\omega) = \frac{1}{1+\varepsilon^2 T_n^2\left(\dfrac{2\omega}{2-\alpha\varepsilon}\right)} = \frac{1}{1+\varepsilon^2 T_n^2\left(\dfrac{\omega}{1-\alpha\varepsilon/2}\right)}, \tag{7}$$

където с ω е означена ъгловата честота.

2. Проектиране на хаусдорфови филтри

Както е известно, модулът на предавателната функция определя АЧХ на филтъра. В равенство (7) се вижда, че аргументът на полинома на Чебишев е разделен на израза $(1-\alpha\varepsilon/2)$. Като се имат предвид неравенства (3), се вижда, че изразът е положително число по-малко от единица. Това води до мащабно "свиване" на АЧХ в сравнение с АЧХ на филтър на Чебишев, както е показано на Фиг.3.



Фиг.3. АЧХ на хаусдорфов филтър и филтър на Чебишев

При проектиране на нискочестотен хаусдорфов филтър-прототип се получиха следните резултати:

- Лентата на пропускане (ЛП) на нискочестотния хаусдорфов филтър-прототип се свива с коефициент $(1-\alpha\varepsilon/2)$.
- При еднакъв ред и еднаква неравномерност в ЛП, АЧХ на нискочестотния хаусдорфов филтър-прототип има същата стръмност и затихване в лентата на задържане (ЛЗ), както филтър на Чебишев.
- Хаусдорфовият нискочестотен филтър има същата линейност на ФЧХ в ЛП, както филтър на Чебишев.
- Хаусдорфовият нискочестотен филтър има същата равномерност на ГВЗ в ЛП, както филтър на Чебишев.
- Хаусдорфовият нискочестотен филтър не може да има по-голяма неравномерност в ЛП от $1/\sqrt{2}$ (-3.01dB), тъй като $\varepsilon<1$ (3).

➢ Полюсните качествени фактори имат същата стойност, както филтър на Чебишев.

От изброеното по-горе може да се направи заключение, че нискочестотните хаусдорфови филтри не могат да намерят практическо приложение, тъй като при тях се получава нежелателно свиване на честотната лента.

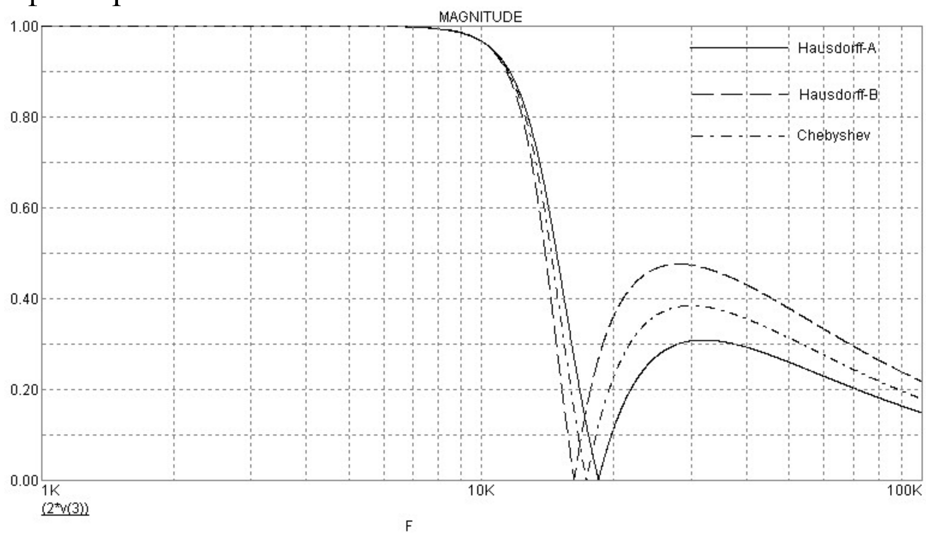
От гледна точка на проектирането, интерес представляват инверсните хаусдорфови филтри (ИХФ). Те са два типа – А и В. На следващите две равенства са показани модулите на предавателните им функции:

$$\left|A_n(\omega)\right|_A = \sqrt{1-\frac{1}{1+\varepsilon^2 T_n^2\left[\frac{2}{\omega(2-\alpha\varepsilon)}\right]}} = \sqrt{\frac{\varepsilon^2 T_n^2\left[\frac{1}{\omega(1-\alpha\varepsilon/2)}\right]}{1+\varepsilon^2 T_n^2\left[\frac{1}{\omega(1-\alpha\varepsilon/2)}\right]}}\;; \tag{8}$$

$$\left|A_n(\omega)\right|_B = \sqrt{1-\frac{1}{1+\varepsilon^2 T_n^2\left(\frac{2-\alpha\varepsilon}{2\omega}\right)}} = \sqrt{\frac{\varepsilon^2 T_n^2\left(\frac{1-\alpha\varepsilon/2}{\omega}\right)}{1+\varepsilon^2 T_n^2\left(\frac{1-\alpha\varepsilon/2}{\omega}\right)}}\;. \tag{9}$$

Разликата е, че при тип А изразът $(1-\alpha\varepsilon/2)$ умножава, а при тип В дели аргумента на полинома на Чебишев. Това естествено води до мащабно разтягане/свиване на АЧХ, както при нискочестотния филтър-прототип. Но за разлика от него инверсните хаусдорфови филтри имат полюси на АЧХ – реални честоти, за които те имат безкрайно затихване. Това позволява към този тип филтри да бъде приложен методът на обобщената равновълнова апроксимация [5], [6]. Чрез него могат да бъдат синтезирани инверсни хаусдорфови филтри, които запазват честотната си лента, а честотите в ЛЗ да бъдат пропорционални на фактора $\alpha\varepsilon$ [4].

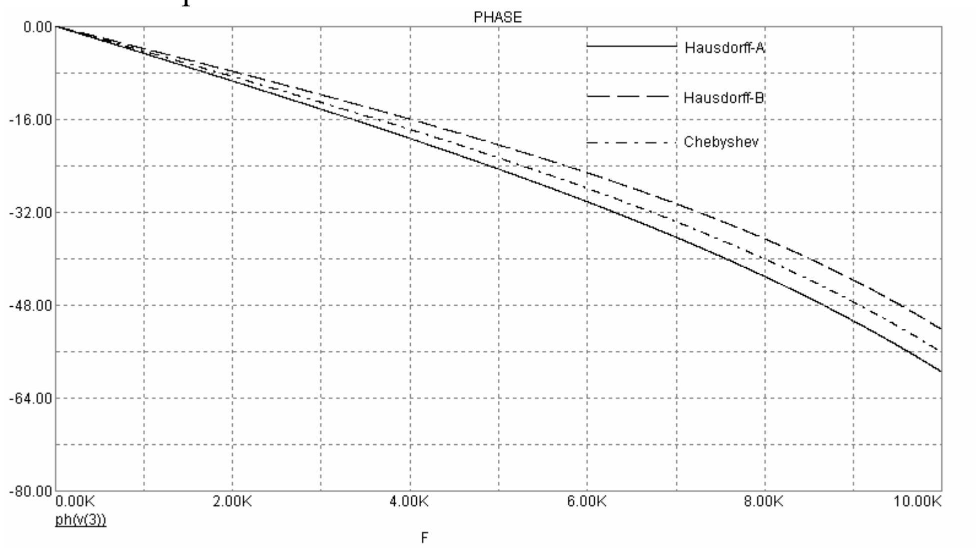
На Фиг.4 са сравнени АЧХ на двата типа инверсни хаусдорфови филтри с инверсен филтър на Чебишев.



Фиг.4. Сравнение на АЧХ на ИХФ-А, ИХФ-В с инверсен филтър на Чебишев

От фигурата се вижда, че инверсните хаусдорфови филтри тип А (ИХФ-А) имат по-малка стръмност на АЧХ в участъка между граничната честота и тази на безкрайно затихване и по-голямо затихване в ЛЗ в сравнение с инверсен филтър на Чебишев. При ИХФ-В е обратно - по-голяма стръмност; по-малко затихване в ЛЗ.

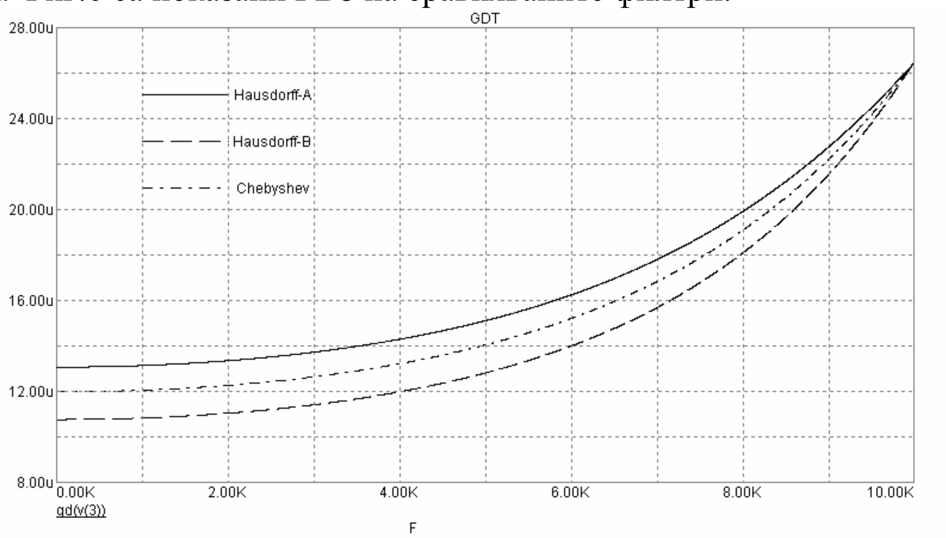
На Фиг.5 са сравнени ФЧХ.



Фиг.5. Сравнение на ФЧХ на ИХФ-А, ИХФ-В с инверсен филтър на Чебишев

От сравнението на ФЧХ се вижда, че най-линейна е тази на ИХФ-А. В конкретния случай подобрението на линейността спрямо инверсен филтър на Чебишев за честота 6kHz е с 5.3%. Най-нелинейна е характеристиката на ИХФ-В.

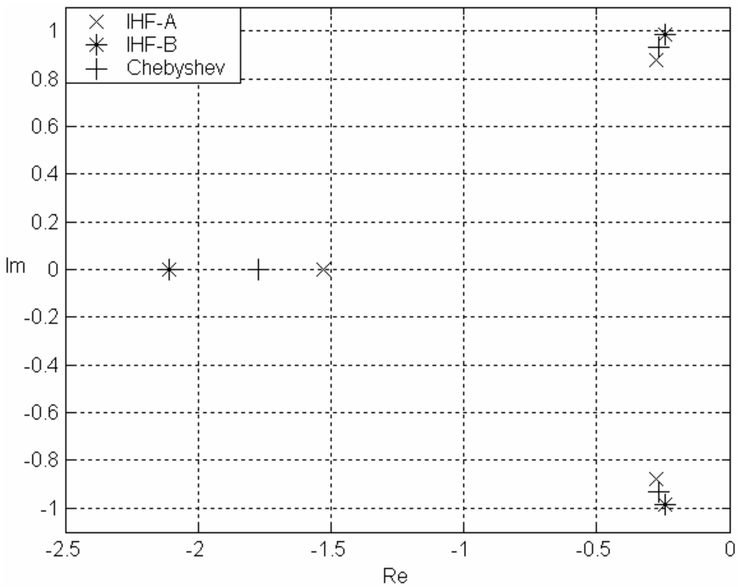
На Фиг.6 са показани ГВЗ на сравняваните филтри.



Фиг.6. Сравнение на ГВЗ на ИХФ-А, ИХФ-В с инверсен филтър на Чебишев

Подобрението на равномерността на ГВЗ на ИХФ-А спрямо инверсен филтър на Чебишев за този случай е малко над 9%. Най-неравномерно е ГВЗ на ИХФ-В.

На Фиг.7 са показани полюсите на сравняваните филтри в комплексната равнина.



Фиг.7. Разположение на полюсите в комплексната равнина

По разположението им може да се съди за стойностите на полюсните качествени фактори на филтрите. Критерий за това е отдалечеността на полюсите с имагинерна част от имагинерната ос. Най-отдалечени са полюсите на ИХФ-А. Това означава, че той ще има най-ниски стойности на полюсните качествени фактори и по-лесни за реализиране стойности на компонентите.

3. Изводи

Апроксимацията в хаусдорфова метрика не води до “революция” в областта на проектиране на филтри. Но може да се каже, че тя представлява една “еволюция” в изследванията в тази област. Използването на полином на Чебишев в (1) води до филтри с характеристики близки до тези на Чебишев. Разликата се определя от стойността на фактора $\alpha\varepsilon$.

Нискочестотният хаусдорфов филтър не може да намери практическо приложение, тъй като се получава стесняване на честотната лента, пропорционално на фактора $\alpha\varepsilon$.

Инверсните хаусдорфови филтри тип В, поради по-високата стръмност на АЧХ, могат да намерят приложение в случаи, когато се изисква потискане на сигнали близки до граничната честота. Имат по-нелинейни ФЧХ, по-неравномерно ГВЗ и по-високи стойности на полюсните качествени фактори.

Инверсните хаусдорфови филтри тип А са може би най-доброто, което се получава при приложението на апроксимация в хаусдорфова метрика при проектиране на електрически филтри. В сравнение с инверсните филтри на Чебишев, те имат по-голямо затихване в ЛЗ, по-линейни ФЧХ, по-равномерно ГВЗ и по-ниски полюсни качествени фактори. Тези техни качества ги правят подходящи за използване при филтрация на цифрови сигнали.

ЛИТЕРАТУРА

[1] SENDOV B. Hausdorff approximations, Kluwer Academic Publishers London 1990, ISBN:0792309014.

[2] ГАЧЕВ, М. Г. Синтез на антенни решетки с оптимална диаграма на насоченост, Дисертация, С., ВМЕИ, 1981.

[3] МАРИНОВ, П. Г. Алгоритми за приближение с рационални функции относно хаусдорфово разстояние, Дисертация, С., БАН, 1991.

[4] АПОСТОЛОВ, П. Хаусдорфови филтри (анализ и синтез), Дисертация, С., ТУ, 2005.

[5] ORCHARD, H. J., G. C. TEMES. Filter design using transformed variables. – IEEE trans. on circuit theory, 1968, CT-15, pp.385-408.

[6] СТОЯНОВ, Г., И. УЗУНОВ, Л. РАЙКОВСКА И Р. БРАДВАРОВ. Анализ, Синтез и проектиране на електрически филтри с персонални компютри. С., Техника, 1991.

COMMON THEORY, APPROXIMATION METHOD AND DESIGN OF ELECTRICAL FILTERS BASED ON HAUSDORFF POLYNOMIALS

Peter Apostolov

Institute for Special Technical Equipment - MI
A .Malinov blvd., "Vitosha" group, p. b. 8, Sofia-1799, Bulgaria

Key words: *Approximation, Polynomial, Design, Inverse filter, Hausdorff, Chebyshev, Magnitude response.*
Summary: *An application of Hausdorff approximation in the modern theory of electrical filters design is shown in the paper. A translated Hausdorff polynomial is defined, which leads to realizable transmission functions of electrical filters. Transmission functions of Hausdorff low-pass filter-prototype and two types of inverse Hausdorff filters are shown. Their frequency characteristics are analyzed.*