Механика
Транспорт
Комуникации
Научно списание

ISSN 1312-3823
том 11, брой 3, 2013 г.
статия № 0780
http://www.mtc-aj.com

ИЕРАРХИЧНА ДЕКОМПОЗИЦИЯ И СИНТЕЗ ЗА МОДЕЛИРАНЕ НА ЛОГИСТИЧНИТЕ СИСТЕМИ ЧРЕЗ ЗАКРИТИ МРЕЖИ ЗА МАСОВО ОБСЛУЖВАНЕ

Кирил Карагьозов
kkaragyozov@yahoo.com

Висше транспортно училище „Тодор Каблешков",
София 1574, ул. „Гео Милев" №158,
БЪЛГАРИЯ

Ключови думи: *мрежи от системи за масово обслужване, дифузионна апроксимация, приближени решения, потоково зависими обслужващи центрове, затворени мрежи*

Резюме: *В този доклад се представя приближено решение за определяне на характеристиките открити мрежи с произволни разпределения на входящия поток и обслужване и ограничен размер на броя на заявките в мрежата.Мрежата от СМО е приближено анализирана чрез декомпозиция и агрегиране. Ограничените подмрежи са представени като потоково зависими центрове, а откритата мрежа е моделирана като Gi/G/1 СМО с зависима от броя на заявките интензивност на обслужване и са представени примерни решения с използването на този подход.*

1.ВЪВЕДЕНИЕ

В настоящият доклад се разглежда възможността за разширяване на общите предпоставки за прилагане на подхода на йерархичното декомпозиция и синтез и потоковата еквивалентност за моделиране на мрежи от системи за масово обслужване с ограничени буфери. Този подход е изключително плодотворен за моделиране на работата на сложни логистични и транспортни системи, които се характеризират с редица особености: няколко класа потоци, обслужване и очакване в ограничени буфери и др. Йерархичната декомпозиция [1], [2] е процес на разделяне на модела на общата система на по малки подмодели. Всеки от тези подмодели се решава и отделните решения се комбинират за да се получи решението на оригиналния модел. Тази комбинация се извършва с използването на специален тип обслужващо устройство наречено ***потоково еквивалентен обслужващ център (flow equivalent service centre FESC).*** Трябва да се отбележи, че алгоритмите за закрити мрежи от СМО се използват за получаване на FECS, докато общия модел може да е открита мрежа.

При един клас заявки всяка подсистема i се разглежда като закрита мрежа, която се решава за последователно $Nmax_i$ пъти при брой на заявките циркулиращи в нея $n=1,2,.....\ Nmax_i$, и като резултат се получава функцията на пропускателната способност на ***потоково еквивалентен обслужващ център*** $\boldsymbol{\mu_i(n),\ n=1,2,.Nmax_i}$. За решаване на тази задача са развити значителен брой точни (за мрежи допускащи мултипликативно представяне на вероятностите на състоянията) [1], [2], [3], [4]. и приближени методи [1], [2], [5], [6], [8], [9]. Подробен обзор и анализ е направен в [1], който показва, че в зависимост от реалната система, съществува богат избор от подходящи методи. В настоящата работа, за получаване на функцията на пропускателната способност (ФПС) на закрита експоненциална мрежа се привежда точния MVA (Mean Value Analysis) метод [2], а в общия случай считаме, че с избор на подходящ метод може да се получи ФПС при достатъчно общи предпоставки [5], [6], [7], [8], [9], [10].

На най-ниското йерархично ниво, всяка подсистема се представя като закрита мрежа от СМО, за която се получава ФПС. На по-горното йерархично ниво подсистемите от по-ниското йерархично ниво са заменени с ***потоково еквивалентни обслужващи центрове*** $\mu_i(n)$***, n=1,2,.Nmax***$_i$. На същото йерархично ниво се получават ФПС на подсистемите, които принадлежат към него. Последователно изпълнявайки тази процедура, цялата система на най-горното йерархично ниво, се представя като един ***потоково еквивалентен обслужващ център.***

Когато външният входящ поток е поасонов поведението на системата се описва от система **M/G**$\mu(n)/1$**, *т.е.*** от обслужващ център с интензивност на обслужване зависеща от броя на заявките в системата. Частният случай **M/M**$\mu(n)/1$ е разгледан в литературата [1], [9], и илюстриран в [12]~~.~~

Разширяването на възможностите да се моделират системи с произволен външен входящ поток приведени във вида **Gi/M**$\mu(n)/1$ ***, n=1,..Nmax*** са разгледани в [12], [13].

2. ПАРАМЕТРИЗАЦИЯ НА СИСТЕМА GI/GI$\mu(N)/1$,N=1,..NMAX

Точни резултати за операционните характеристики на тази система няма. В [11] е изведена дифузионна апроксимация на параметрите на система **Gi/Gi**$\mu(n)/1$ ***, n=1,..***∞ **.** Като се вземат за основа получените в [11] резултати, в [13] се извеждат крайните формули за вероятностите на състоянията и другите операционни характеристики за интересуващия ни случай $\mu(n)$ ***, n=1,..Nmax.*** Изходна база са получените крайни резултати в [13], които се привеждат без извод.

<u>Обозначения</u>

λ- интензивност на входящия поток от външната среда бр/ед. време;

Ca- коефициент на вариация на входящия поток;

Cs(n) - коефициент на вариация на времето за обслужване при n заявки в системата;

Pn- вероятности на състоянията в системата;

Lq,Ls- среден брой заявки в системата и в опашката.

Нека да се въведат обозначенията [11], [13] приети при дефинирането на дифузиония процес:

$$(1) \qquad \beta_k = \lambda - \mu(n)\ ;\ \alpha_k = \lambda Ca^2 + \mu(n) Cs^2(n)$$

$$(2) \qquad \rho = \frac{\lambda}{\mu(1)}\ ;\ \gamma_k = \exp\left(2\frac{\beta_k}{\alpha_k}\right)\ ;\ C = \rho\frac{1-\gamma_1}{1-\rho};\ ;$$

За вероятностите на състоянията в [13] са получени резултати, а чрез тях и за операционните характеристики –среден брой в системата Ls, среден брой в опашката Lq и средният брой под обслужване Lo.

Като се въведе обозначеното Π_j вероятностите може да се представят по компактно:

(3) $$\Pi_j = \begin{cases} 1 & , j=1, j>N_{\max} \\ \dfrac{\alpha_1}{\alpha_n} \prod\limits_{k=1}^{j-1} \gamma_k & , 2 \le j \le N_{\max} \end{cases}$$

(4) $$P_n = \begin{cases} P_0 C \Pi_n & n = 1,2,\ldots N_{\max} \\ P_0 C \Pi_{N_{\max}} \gamma_{N_{\max}}^{(n-N_{\max})} & n = N_{\max}+1, N_{\max}+2,\ldots. \end{cases}$$

(5) $$P_0 = \left[1 + C \left\{ \sum_{n=1}^{N_{\max}} \Pi_n + \Pi_{N\max} \times \frac{\gamma_{N_{\max}}}{1-\gamma_{N_{\max}}} \right\} \right]^{-1}$$

Средният брой заявки в системата (в опашката и под обслужване т.е извън и в реалната система) се получава от:

(6) $$Ls = \sum_{k=1}^{\infty} kP_k = P_0 C \left[\sum_{k=1}^{N_{\max}} k\Pi_k + \Pi_{N_{\max}} \frac{N_{\max}\gamma_{N_{\max}}\left(1-\gamma_{N_{\max}}\right) + \gamma_{N\max}}{\left(1-\gamma_{N_{\max}}\right)^2} \right]$$

Средният брой заявки под обслужване ***-Lo*** при ***Nmax*** заявки, които могат да се обслужват е:

(7) $$Lo = \sum_{k=N_{\max}-1}^{\infty} (k - N_{\max})P_k = \sum_{k=1}^{N_{\max-1}} (k - N_{\max})P_k + N_{\max}\left(1 - \sum_{k=0}^{N_{\max}-1} P_k\right)$$

Средният брой заявки ***Lq*** в опашката пред подсистема 2 е:

(8) Lq=Ls-Lo

С този извод всички важни операционни характеристики са определени. В повечето случаи, при свеждането на йерархичната система от модели на закритата мрежа до потоково еквивалентен прибор, алгоритмите, с които се решават подмоделите, дават коефициент на вариация на обслужването независещ от броя на заявките в мрежата, т.е. ***Cs(n)=Cs*** .

3.АЛГОРИТЪМ MVA (MEAN VALUE ANALYSIS)- ЕДИН КЛАС

Дадени са:

N- популация в мрежата, общия брой на заявките в мрежата.

Маршрутната матрица Q с елементи $\{q_{ij}\}$, i,j=1,K, K- брой обслужващи центрове.

Времената за обслужване в к-я център τ_k , k=1,K.

Решението на системата линейни уравнения, при произволно зададено e_i (примерно $e_1=1$) - $e_i = \sum_{k=1}^{K} e_k q_{ki}$ дава относителните (спрямо e_1) честоти e_i на посещение на център i от дадена заявка.

Центровете на обслужване са три типа:

A) ***Delay Service (DS)*** -с неограничена възможност на обслужване. В тях заявката не чака и се задържа само за времето за обслужване.

B) ***Independent Service (IS)*** - интензивността на обслужване не зависи от броя на заявките в центъра.

C) ***Load Dependent Service (LDS)*** - интензивността на обслужване зависи от броя на заявките в центъра. Този тип по определение съвпада с дефинирания ***потоково еквивалентен център.***

Алгоритъм MVA при IS и DS центрове

Алгоритъмът се основава на трите уравнения:

* ***Закон на Little за цялата мрежа:***

(9) $$\lambda^*(N) = \frac{N}{\sum_{k=1}^{K} T_k(N)}$$

където $\lambda^*(N)$ е производителността на мрежата или в други термини пропускателната й способност при популация N, T_k е времето за престой в център к.

* ***Закон на Little за отделния център:***

(10) $$Ls_k(N) = \lambda^*(N) T_k(N)$$

* ***Времената за престой в отделния център***

(11) $$T_k(N) = \begin{cases} e_k \tau_k & \text{DS center} \\ e_k \tau_k \left(1 + A_k(N)\right) & \text{Is center} \end{cases}$$

$A_k(N)$ е средния брой заявки, които вижда пристигащата нова заявка в център **к.**

MVA е по-скоро техника на решаване, върху която се основават както точни така и редица приближени методи. В така наречените мултипликативни или още разделяеми затворени мрежи $A_k(N)$ има проста форма:

(13) $A_k(N)=Ls_k(N-1)$

Точният **MVA** метод се състои в итеративното прилагане на (10), (11) и (12).

Алгоритъм MVA за IS, DS центрове [2]

for k=1 to K do Ls_k=0 **(инициализация)**
for n=1 to N do
begin
for k=1 to K do **(стъпка 1)**
begin

$$T_k = \begin{cases} e_k \tau_k & \text{DS center} \\ e_k \tau_k \left(1 + Ls_k\right) & \text{IS center} \end{cases}$$

end

$$\lambda^*(n) = \frac{n}{\sum_{k+1}^{K} T_k}$$ **(стъпка 2)**

for k=1 to K do $Ls_k = \lambda^* T_k$ **(стъпка 3)**
end

За да се приложи алгоритъма за LDS центрове е необходимо да се включат допълнителни зависимости в стъпки 1 и 3. Нека $p_k(j/n)$ е относителния дял на времето когато център **k** има **j** заявки, а в мрежата се намират **n.**

Следните зависимости се прибавят за стъпка 1 и 3 само за LDS центровете.

1. Определяне на времето за престой на **k**-ти **LDS** център:

(14) $$T_k = e_k \sum_{j=1}^{n} \frac{j}{\mu_k(j)} p_k(j-1/n-1)$$

2. Определяне на вероятностите

(15) $$p_k(j/n) = \begin{cases} \dfrac{\lambda^*(n)}{\mu_k(j)} p_k(j-1/n-1) & j = 1,2,..n \\ 1 - \sum_{i=1}^{n} p_k(j/n) & j = 0 \end{cases}$$

При инициализацията, е необходимо за LDS центровете, на вероятностите $p_k(j/n)$ да се присвоят стойностите:

$$p_k(j/n)=\begin{cases}1 & n=0, j=1,N \\ 0 & n=1,N, j=1,N\end{cases} \qquad (16)$$

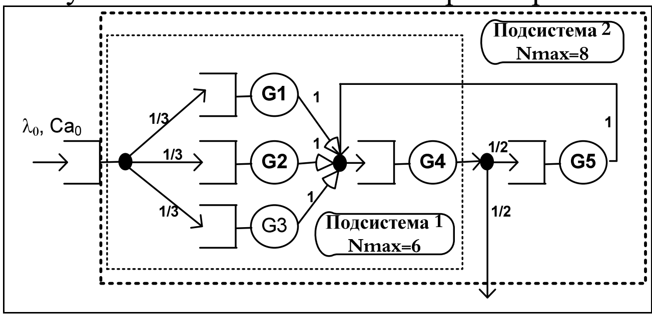
В резултат на изпълнението на алгоритъма се получават стойностите на функцията на пропускателната способност на мрежата и респективно на представянето й като LDS център $\lambda^*(n)=\mu(n)$, n=1,Nmax., както и времената за престой в системата при n заявки - T(n) , n=1,Nmax.

Съществуват многобройни изследвания и приближени алгоритми, които позволяват да се получи функцията на пропускателната способност на мрежи с произволни разпределения на времената за обслужване [1], [2], [7], [8], [10], и няколко класа заявки. Алгоритъм MVA е приведен за илюстрация, поради неговата компактност.

4. ЧИСЛОВ ПРИМЕР

4.1. СТРУКТУРА НА СИСТЕМАТА

В този пример се разглежда една типична структура на транспортна система, която се привежда по-скоро за илюстрация на йерархичния подход, отколкото за моделиране на конкретния обект. В подсистема 1 състояща се от IS центрове 1,2,3, и 4 могат да присъстват максимум 6 заявки, т.е. $Nmax_1$=6, а в цялата мрежа Nmax=8. Съгласно изложения по-горе подход, първо се разглежда подсистема 1 изолирано с цел да се получи нейната функция на пропускателната способност. За изолираната подсистема $e_1= e_2= e_3 =0.33$ и $e_4=1$. Коефициентите на вариация на времената за обслужване за всички СМО са приети равни на 1.

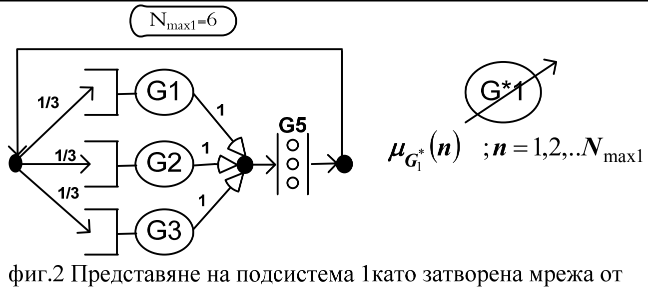


СМО					табл 1
No	1	2	3	4	5
Тип	IS	IS	IS	IS	DS
e_i	0.5	0.5	0.5	1.5	1
τ_i	1	1	1	0.4	0.8

фиг.1. Структурна схема на транспортна система

4.2. ПРИЛОЖЕНИЕ НА MVA ЗА АГРЕГИРАНЕ НА ПОДСИСТЕМА 1

Резултатите от приложението на MVA за подсистема 1, фиг.2 са дадени в табл.2.

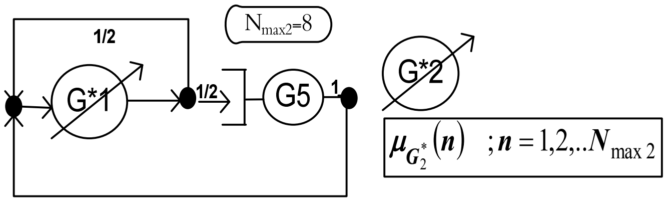


фиг.2 Представяне на подсистема 1като затворена мрежа от СМО. Резултативна функция на пропускателната способност

n	Обслужващи центрове								табл.2	
n	G1		G2		G3		G4		Опер. х-ки	
	$T_1(n)$	$Ls_1(n)$	$T_2(n)$	$Ls_2(n)$	$T_3(n)$	$Ls_3(n)$	$T_4(n)$	$Ls_4(n)$	ΣT_k	$\lambda^*(n)=\mu_{G_1^*}(n)$
1	0.33	0.24	0.33	0.24	0.33	0.24	0.40	0.29	1.40	*0.71*
2	0.41	0.47	0.41	0.47	0.41	0.47	0.51	0.59	1.75	*1.14*
3	0.49	0.70	0.49	0.70	0.49	0.70	0.63	0.90	2.11	*1.42*
4	0.57	0.92	0.57	0.92	0.57	0.92	0.76	1.24	2.46	*1.63*
5	0.64	1.14	0.64	1.14	0.64	1.14	0.90	1.59	2.82	*1.78*
6	0.71	1.35	0.71	1.35	0.71	1.35	1.04	1.35	3.17	*1.89*

4.3. АГРЕГИРАНА ПОДСИСТЕМА 2

Подсистема 1 се замества с еквивалентен потоково зависим център и подсистема 2 добива вида (фиг.3):



фиг.3 Агрегирана подсистема 2 с потоково зависим център. Резултативна функция на пропускателната способност

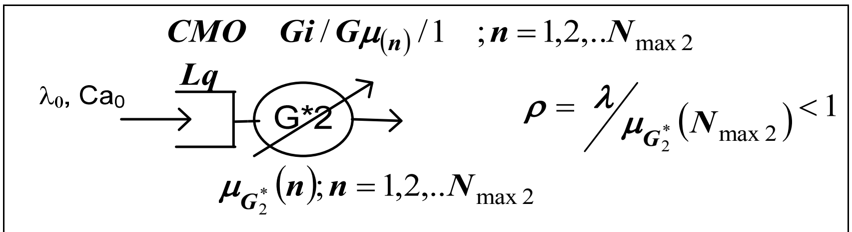
табл..3

	Среден брой Ls_i		ФПС
n	Център 1	Център 2	$\mu^*(n) = \mu_{G_2^*}(n)$
1	0.36	0.64	0.45
2	0.66	1.34	0.83
3	0.90	2.10	1.12
4	1.09	2.91	1.36
5	1.24	3.76	1.55
6	1.36	4.64	1.70
7	1.44	5.56	1.80
8	1.49	6.51	1.86

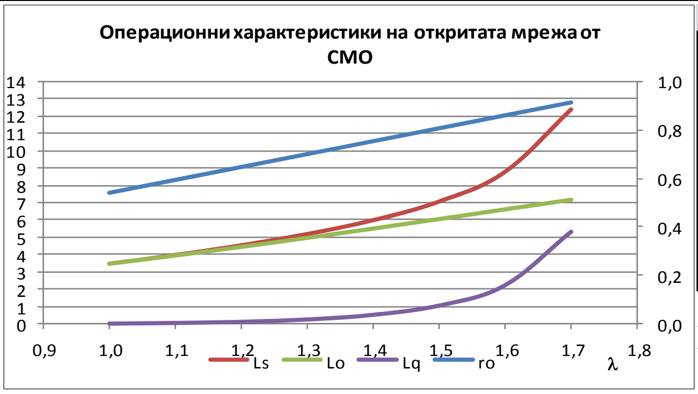
Както се вижда от табл.3, максималната пропускателна способност в следствие на ограничения размер на буфера в подсистема 1 намалява от теоретичната стойност - μ_4= 2.5 заявки/ед.време до **1.89**, а в следствие на ограничението на Nmax=8 заявки в мрежата до **1.86**.

4.4 АГРЕГИРАНО ПРЕДСТАВЯНЕ НА ОТКРИТАТА МРЕЖА.

На най-високото йерархично ниво системата добива вида (фиг.4), а резултатите са получени с прилагане на зависимости (6)-(8) за интензивност на входящия поток $\lambda_0 = \{1 \div 1.7\}$ *и* $Ca_0 = 0.7$ и са приведени в таблица 4, фиг.5 и фиг.6.



фиг.4 Агрегирано представяне на откритата мрежа от СМО с един потоково зависим център



Фиг.5. Операционни хрaктеристики на открита мрежа от СМО

табл.4

λ	ρ o	Ls	Lo	Lq
1,0	0,54	3,50	3,47	0,03
1,1	0,59	4,00	3,94	0,06
1,2	0,65	4,56	4,44	0,13
1,3	0,70	5,22	4,95	0,26
1,4	0,75	6,01	5,49	0,52
1,5	0,81	7,09	6,04	1,06
1,6	0,86	8,81	6,59	2,21
1,7	0,92	12,42	7,15	5,28

λ -интензивност на вх. поток
ρ -натоварване на системата
Ls-среден брой в откритата мрежа
Lo-среден брой в опашката пред мрежата
Lo-среден брой под обслужване и чакане в мрежата

5. ОСНОВНИ ИЗВОДИ И РЕЗУЛТАТИ

Получените основни резултати и изводи са:

- ❖ предложен е модел на йерархична декомпозиция, които позволява да се моделират адекватно ограниченията на буферите в отделните подсистеми на различните йерархични нива;
- ❖ разработен е подхода за представяне на отделните подсистеми като закрити мрежи от СМО, решението на които е сведено до определяне на потоково еквивалентен център с зависеща от състоянието на системата интензивност на обслужване;
- ❖ получени са, в явен вид, зависимости за средните характеристики и вероятностите на състоянията на система за масово обслужване с произволен входящ поток и зависеща от състоянието на системата интензивност на обслужване;
- ❖ представен е подхода за моделиране на открита мрежа с произволен входящ поток с използването на потоково еквивалентен център отразяващ ограниченията във вместимостта на отделните подсистеми.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Lavenberg,S.,S. A Perespective on Queuing Models of Computer Performance ,Performance evaluation 10(1989),North Holland.

[2] Lazowska D.E.,Zahorijan J.,Graham G.S.,Sevcik C.. Quantative System performance (Computer System Analysis Using Queueing Network models). Prntice-hall,inc.,Englewood Cliffs, New Jerssey,1984.

[3] Reiser M.,Lavenberg S.S. Mean Value Analysis of Closed Multichain Queueing Networks., J.A.C.M.,vol.27,No2,1980.

[4] Baskett F., Chandy K.m.,Muntz R.R. and Palacios F.. Open, Clsed and Mixed Networks of Queues with Different classes of Customers. JACM., vol.22,No2,1975.

[5] Sauer C.H.,Chandy K.M.. Aproximate Analysis of Central Server models. IBM J. Res. and Develop. ,vol.19, 1975.

[6] Chandy K.M., Herzog U. , Woo L.. Parametric Analysis of Queueing networks IBM J.Res.Develop., N°19, 1975.

[7] Cahndy K.M., Herzog U. , Woo L.. Aproximate Analysis of Central Queueing networks. IBM J.Res.Develop. No19, 1975.

[8] Walstra R. Nonexponential Networks of Queues: A Maximum Entropy Analysis. ACM Sigmet.,1985.

[9] Dallery,Y.Approximate Analysis of Genaral Open Queuing Networks with ReastrictedCapacity.Performance evaluation 11 (1990) North Holland.

[10] Silva,E.,S.,R.R.Muntz.Approximate Solutions for Class of Non-Product Form Queueing Network Models.Performance evaluation 7(1987) 221-242,North-Holland

[11] Pujolle G., AI Wu. Approximation par un processus de diffusion de files Gi/Gi/1 avec dependance de l'etat. R.A.I.R.O. Recherche operationnelle,vol. 19, No 2, 1985, 117-131

[12] Карагьозов К.. Приложение на модел на закрита двуфазна мрежа от СМО за моделиране на пропускателната способност и работата на транспортни подсистеми с ограничени буфери. VIII Научна конференция на ВВТУ ".Т.Каблешков" 17-18 ноември, София, 1995**.**

[13] Карагьозов К. Приложение на закрити мрежи за масово обслужване за моделиране на сложни транспортни системи с ограничени буфери., X научна конференция с международно участие ТЕМРТ 97, ВВТУ

HIERARCHICAL DECOMPOSITION AND SYNTHESIS FOR LOGISTICS SYSTEMS MODELING BY CLOSED QUEUING NETWORKS

Kiril Karagyozov,
kkaragyozov@yahoo.com

Todor Kableshkov University of Transport,
158 Geo Milev Street, Sofia,
BULGARIA

Key words: *queueing networks, diffusion approximation,, approximate solution, load dependent center*

Abstract: *In this paper, we present an approximate solution for the behavior of relativly general open queueing networks with simultaneous resource possession.The queueing network is analyzed approximatly using decomposition and agregation. Constrainted subnetworks are presented as load dependent centers and the open queueing network is modeled as the Gi/G/1 queue with state dependent service times, for which closed solutions are obtained.*