Механика Транспорт Комуникации

Научно списание

ISSN 1312-3823

том 11, брой 3, 2013 г.

статия № 0779

http://www.mtc-aj.com

АПРОКСИМАЦИЯ НА МОМЕНТИТЕ НА ПРОЦЕСИТЕ НА ПОСТЪПЛЕНИЕ, ЗАДЪРЖАНЕ И НОРМАЛИЗАЦИЯ НА ТРАНСПОРТНИЯ ПОТОК

Кирил Карагьозов
kkaragyozov@yahoo.com

Висше транспортно училище „Тодор Каблешков",
София 1574, ул. „Гео Милев" №158,
БЪЛГАРИЯ

Ключови думи: *транспортен поток, Ерлангов входящ поток, моменти на броя на постъпленията за дадено време, сумарен престой в системата, среден престой в системата.*

Резюме: *С използване на точните резултати за вероятностите да постъпят n заявки за време t при ерлангово разпределение на входящия поток - са получени стойностите на средния брой и дисперсията на постъпленията.Тези стойности са апроксимирани и са получени лесни за ползване аналитични зависимости на средния брой и дисперсията на броя на постъпилите за време t във функция на коефициента на вариация на интервалите на входящия поток.Получените зависимости са използвани в модели за определяне на средния (на една заявка) и сумарния престой на заявките обслужени за общия период на задържане и нормализация, частен случай, на които е модела на кръстовище регулирано от светофар. Направен е опит за оценка и на дисперсиите на показателите на работа на такъв тип системи.*

1. ВЪВЕДЕНИЕ

При възникване на прекъсване на движението (червен сигнал на светофара, авариен или „планов прозорец" в железопътния транспорт и др.) за детерминирано или случайно време t – време за „задържане", се реализира процес на «задържане» на транспортния поток, характеризиращ се със средена стойност N(t) и дисперсия $\sigma^2(t)$ на броя на постъпилите и «задържани « за време t транспортни единици. Тези функции зависят от следните фактори:

-«синхронен» или «асинхронен» отчет на вероятностен процес. При «синхронен» отчет началото на интервала t е времето за постъпване на първата заявка, а при „асинхронен" отчет началото на интервала t не зависи от момента на първото постъпване.

-вероятностното разпределение на интервалите на входящия поток;

-вероятностното разпределение на случайната величина – време за „задържане" t .

Вероятностните процеси описващи броя на постъпилите заявки за време t са разгледани подробно от [9] Haight, за входящи потоци с функции на разпределение на интервалите между постъпващите заявки : по ерлангов закон от ***l***-ти порядък и отместено експоненциално разпределение. Това което е ценно в това разглеждане са изведените формули за определяне на вероятностите на броя на постъпващите заявки за време ***t***, които лесно могат да бъдат определени с използване на функцията в EXCEL – POISSON(x;mean;cumulative), която определя сумата от 0 до x на вероятностите на поасоновото разпределение със средна стойност –mean и cumulative= true. Ако cumulative= false, функцията дава стойността на вероятността да има x заявки – P(n=x)=Px.

Редица автори [2], [3], [4], [5], [6], [7] много добре представят асимптотичните резултати за средната стойност N(t) и дисперсията $\sigma^2(N(t))$ на броя на постъпленията за за време t, при различните типове вероятностни процеси –„синхронен" и „асинхронен" отчет.

2. МОМЕНТИ НА БРОЯ НА ПОСТЪПЛЕНИЯТА ПРИ ЕРЛАНГОВ ВЕРОЯТНОСТЕН ПРОЦЕС НА ПОСТЪПВАНЕ

«Асинхронен отчет «

Средна стойност N(t)

(1) $$N(t) = t / m_1 = t / \frac{1}{\lambda} = \lambda t$$

където m1=1/λ е средната стойност на интервала на входящия поток (първия начален и централен момент на разпределението на интервалите на входящия поток)

Дисперсия- $\sigma^2(N(t))$

Формулата за дисперсията на броя на постъпленията за време t се извежда въз основа на апроксимацията приведена в [5] :

(2) $$\sigma^2(N(t)) \cong \frac{\sigma_\alpha^2}{m_1^3} t + \frac{1}{6} + \frac{1}{2}\frac{\sigma_\alpha^4}{m_1^4} - \frac{1}{3}\frac{\mu_3}{m_1^3}$$

където σ_α е средно квадратичното отклонение на интервалите на входящия поток, а $\mu_3 = E(x-\bar{x})^3$ е третия централен момент на случайната величина x- (интервали на входящия поток.

Като се използва коефициента на вариация на входящия поток - $C_\alpha = \frac{\sigma_\alpha}{1/\lambda} = \lambda\sigma_\alpha$ и зависимостта между началните $\mu_i = E(x-\bar{x})^i$ и централните моменти $m_i = E(x-\bar{x})^i$ - $\mu_3 = m_3 - 3m_1\sigma_\alpha^2 - m_1^3 = m_1^3\left(\frac{m_3}{m_1^3} - 3C_\alpha^2 - 1\right)$, след преобразуване на формула (2) се получва следната зависмост ***за дисперсията на броя на постъпилите за време t***:

(3) $$\sigma^2(N(t)) \cong C_\alpha^2 \lambda t + \frac{1}{6} + \frac{1}{2}C_\alpha^4 - \frac{1}{3}\left(\frac{m_3}{m_1^3} - \frac{3m_1\sigma_\alpha^2}{m_1^3} - 1\right)$$

За да се получи апроксимация във функция на коефициента на вариация на входящия поток се приемама, че интервалите на входящия поток имат ерлангово разпределение $Erl(\lambda, l)$ с параметри: средна стойност $m_1 = 1/\lambda$ и $l = 1/C_\alpha^2$. При това приемане и отчитане на зависимостта на l от C_α се получава следната зависимост за

$^{m_3}\!\!\diagup_{m_1^3} = \left(2C_\alpha^2+1\right)\left(C_\alpha^2+1\right)$ и след заместване в (3) и преобразуване се получава търсената апроксимация за дисперсията:

$$(4) \qquad \sigma^2\left(N(t)\right) \cong C_\alpha^2 \lambda t + \frac{1}{6}\left(1-C_\alpha^4\right)$$

Вероятностите за време t да постъпят n заявки - P_n***:***

$$(5) \qquad P_n(t) = \begin{cases} \sum_{k=0}^{l-1}\left(1-\frac{k}{l}\right)\frac{(\lambda l t)^k}{k!}e^{-\lambda l t} & n=0 \\ \sum_{k=-l+1}^{l-1}\left(1-\frac{|k|}{l}\right)\frac{(\lambda l t)^{nl+k}}{(nl+k)!}e^{-\lambda l t} & n \ge 1 \end{cases}$$

«Синхронен отчет «[5]

Средна стойност

$$(6) \qquad N(t) \cong t/m_1 - \frac{1}{2} + \frac{\sigma^2}{2m_1^2} \cong \lambda t - \left(\frac{1-C_\alpha^2}{2}\right)$$

Дисперсия

$$(7) \qquad \sigma^2\left(N(t)\right) \cong C_\alpha^2 \lambda t + \frac{1}{6} + \frac{1}{12} + \frac{5}{4}C_\alpha^4 - \frac{2}{3}\frac{\mu_3}{m_1^3}$$

След аналогично преобразуване, както в случая с „асинхронен” отчет; окончателно се получава апроксимацията за ***дисперсията на броя на потъпилите за време t:***

$$(8) \qquad \sigma^2\left(N(t)\right) \cong C_\alpha^2 \lambda t + \frac{1}{12}\left(1-C_\alpha^4\right)$$

Вероятностите за време t да постъпят n заявки - P_n ***:***

Нека да се обозначи с $Q(x,n)$ сумата на членовете на поасоновото разпределение от 0 до n, т.е. $Q(x,n) = \sum_{i=0}^{n}\frac{x^i}{i!}e^{-x}$, която в Excel се реализира от фукцията Poisson(x,n.true).

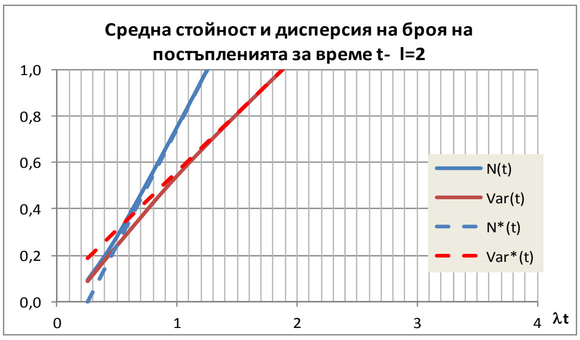
За вероятностите P_n се получава:

$$(9) \qquad P_n(t) = \begin{cases} Q(\lambda l t, l-1) & n=0 \\ Q(\lambda l t, nl+l-1) - Q(\lambda l t, nl-1) & n \ge 1 \end{cases}$$

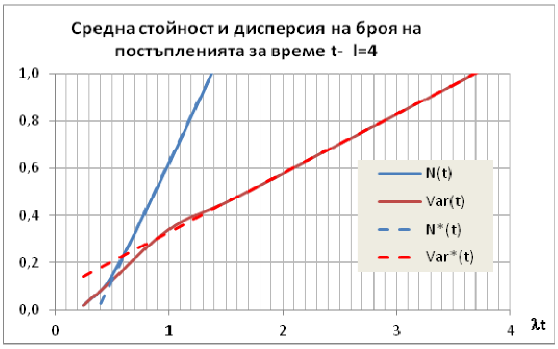
Чрез вероятностите P_n лесно могат числено да се определят точните средна стойност и дисперсия на броя на постъпленията за време t при разпределение на интервалите на входящия поток $Erl(\lambda, l)$.

$$(10) \qquad N(t) = \sum_{n=0}^{\infty} nP_n \qquad \text{и} \qquad \sigma^2\left(N(t)\right) \cong \sum_{n=0}^{\infty}\left(n-N(t)\right)^2 P_n$$

На фиг. 1 и 2 са дадени точните средни стоиности –N(t) и дисперсии Var(t) определени по ф-ла 8, а с (*) са отбелязани техните апроксимации при l=2 и l=4. Трябва да се отбележи, че апроксимациите съвпадат с точните резултати при $\lambda t \ge 1$, което в практическите приложения е изпълнено.



Фиг. 1

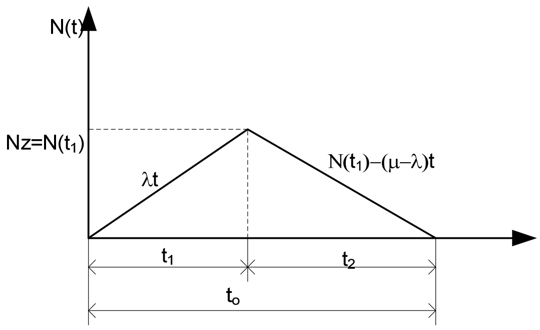


фиг.2

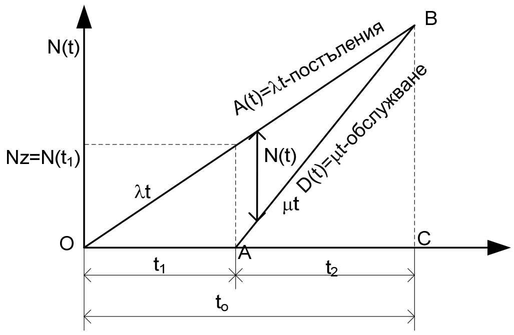
3. ПРОЦЕСИ НА ЗАДЪРЖАНЕ И НОРМАЛИЗАЦИЯ ПРИ ПРЕКЪСВАНЕ НА ОБСЛУЖВАНЕТО

3.1 Детерминиран процес на задържане и нормализация

Нека в момента t=0 възниква прекъсване на пропускането на постъпващия входящ поток с интезивност λ бр./ед.време за време t_1. След времето за задържане продължава, като постъпването на потока с интензивност λ, така и пропускане с интензивност $\mu > \lambda$. Максималният размер на броя на заявките в системата е в края на времето t_1, след който опашката се намалява до 0. Тези процеси са илюстрирани на фиг. 3.



Фиг.3 Детерминиран процес на задържане и нормализация



Фиг.4 Детерминиран процес на задържане и нормализация

Като се определи по два различни способа Nz и се приравнят се получава:

(11) $Nz = \lambda t_1 = (\mu - \lambda) t_2 = (\mu - \lambda)(t_0 - t_1)$ [бр.]

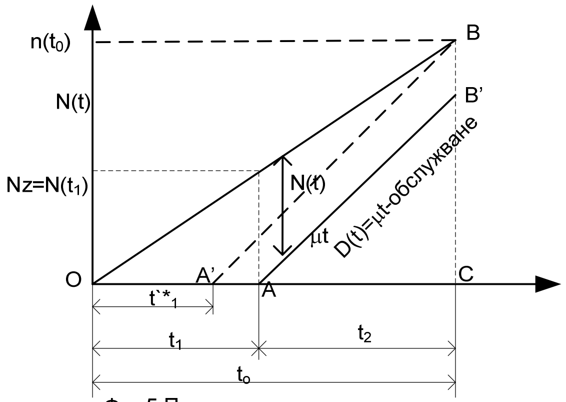
Като се приеме означението $\rho = \lambda / \mu < 1$ и се реши спрямо t_2 – ***периода за нормализация*** или t_o –***цикъла на нормализация***:

(12) $t_2 = \dfrac{\rho t_1}{1-\rho}$; $t_0 = t_1 + t_2 = t_1\left(\dfrac{\rho}{1-\rho} + 1\right) = \dfrac{t_1}{1-\rho}$

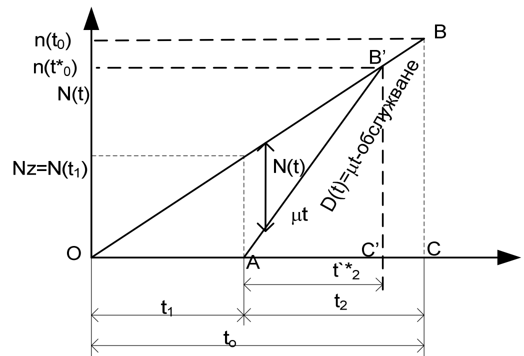
Сумарният престой в системата за цикъла на нормализация е площта на триъгълника на фиг.3 или площта на триъгълника ОАБ на фиг.4 и средният престой отнесен на една постъпваща заявка в цикъла на нормализация W е :

(13) $B = \dfrac{Nzt_0}{2} = \dfrac{\lambda t_1^2}{2(1-\rho)}$ [бр.време] $W = \dfrac{B}{N(t_0)} = \dfrac{B}{\lambda t_0} = \dfrac{Nzt_0}{2\lambda t_0} = \dfrac{t_1}{2}$ [време/бр]

3.2 Процес на задържане и нормализация при ерлагово разпределение на входящия поток.



Фиг.5 Процес на задържане и нормализация при Ерлангов входящ поток- схема 1



Фиг.6 Процес на задържане и нормализация при Ерлангов входящ поток-схема 2

Ако времената на задържане и нормализация t1 и t2 са зададени, а процеса на постъпване е разпределен по Ерлангов закон е възможна реализация на броя на постъпленията за цикъла на нормализация при които $n(t_0) > \mu t_2$ с вероятност $P[n(t_0) > \mu t_2] = 1 - \sum_{i=0}^{i=|\mu t|} P_i$. Този случай може да се определи като схема 1 (фиг.5) и при него случайната величина на сумарния престой В е площта АВ*ВО. **В** схема 2 $n(t_0) < \mu t_2$ с вероятност $P[n(t_0) < \mu t_2] = \sum_{i=0}^{i=|\mu t|} P_i$, като в този случай случайнта величина на сумарния престой **В** е площта АВ'О.

Случайната величина ***B(n)*** във функция на броя на постъпилите заявки- за схема 1-точка В, а за схема 2 –точка В', се извежда от геометрията в двете схеми и е :

$$B(n) = \frac{nt_0}{2} - \frac{\mu t_2^2}{2} \qquad n > \mu t$$

(14)

$$B(n) = \frac{nt_1^2}{2} \qquad n < \mu t$$

Средната стойност и дисперсията на сумарния престой за цикъла на нормализация, след отчитане на формули 10 и 14 се определя като:

Средна стойност:

$$E(B) = \overline{B} = \sum_{n=0}^{|\mu t|} \frac{nt_1}{2} P_n + \sum_{n=|\mu t|+1}^{\infty} \left(\frac{nt_0}{2} - \frac{\mu t_2^2}{2} \right) P_n \qquad (15)$$

Дисперсия

$$\sigma^2(B) = \sum_{n=0}^{|\mu t|} \left(\frac{nt_1}{2} - \overline{B} \right)^2 P_n + \sum_{n=|\mu t|+1}^{\infty} \left(\frac{nt_0}{2} - \frac{\mu t_2^2}{2} - \overline{B} \right)^2 P_n \qquad (16)$$

4. ИЗВОДИ

Изследвани са апроксимаците на средната стойност и дисперсията на броя на постъпващите за определено време, като е използван Ерлагов закон на разпределение на интервалите на входящия поток. Тези апроксимации са представени във функция на коефициента на вариация на входящия поток, което дава възможност да се използват и при разпределения на входящия поток различни от Ерлангови.

Изведени са модели позволяващи определяне на основни показатели на работата на системи с периоди на задържане, нормализация и за цикъла на нормализация, като среден престой на една заявка и сумарен престой на всички заявки за цикъла на нормализация. Разгледани са както детерминирания процес на задържане и нормализация, така и подход за определяне на средната стойност и дисперсията на сумарния престой при ерлангов входящ поток.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Cox D.R., Renewal Theory. Mathuen, London,1962

[2] Smith W.L., On renewal theory, counter problems, and quasi-Poisson processes, Proc. Camb.Phil. Soc. 53,175, 1957

[3] Muller J.W. Some relations between asymptotic results for-time –distorted processes. Part I: The expectation values, Rapport BIPM-75/11, paper 30, 1975

[4] Muller J.W. Some relations between asymptotic results for-time –distorted processes. Part II: The Variances, Rapport BIPM-76/15, paper 31, 1975

[5] Muller J.W. Asymptomatic results for a modified renewal process and their application to counting distributions., Rapport BIPM-77/1, 1977

[6] Chodhry M.L., X. Yang, B. Ong, Computing the Distribution Function of the Number of Renewals, American Journal of Operations Research, No 3, 2013

[7] Whitt W. Approximating a Point Process by a Renewal Process, I: Two Basic Methods, Operation research, vol. 30, No 1, 1982.

[8] Haight F.A. Mathematical Theories of Traffic Flow. Academic press New York London,1963

APPROXIMATION OF THE MOMENTS OF PROCESSES OF TRAFFIC FLOW ARRIVAL, INTERRUPTION AND NORMALIZATION

Kiril Karagyozov,
kkaragyozov@yahoo.com

Todor Kableshkov University of Transport,
158 Geo Milev Street, Sofia,
BULGARIA

Key words: *traffic flow, Erlang arrival flow, moments of the number of arrivals, total system time, average system time*

Abstract: *Using the exact results for the probability of n customers for time t with Erlang distribution of arrival flow intervals, the mean and variance of the number of arrivals are obtained. These values are approximated and user-friendly analytical dependences of the mean and variance of arrivals for time t as a function of the coefficient of variance of arrival flow intervals are obtained. The dependencies are used in models to determine the average time of interruption (per customer) and the total time of interruption for all customers served for the total period of interruption and normalization, a case study of which is the model of an intersection regulated by traffic lights. An attempt is made also to assess variances of the performance of such systems.*