

МАТРИЦА НА КОРАВИНА НА ДВУСТРАННО ЗАПЪНАТ ДЪГОВ КРАЕН ЕЛЕМЕНТ ОТ РАВНИННА ОКРЪЖНОСТ

Банко П. Банков, Лилия Б. Петрова

Bankov@vsu.bg, lbphr_sf_bg@yahoo.com

ВСУ "Л. Каравелов", ВТУ "Т. Каблешков",
ул. "Суходолска" 32, София 1373, бул. "Гео Милев" 158, София 1574,
България

Ключови думи: двустранно запънат дъгов краен елемент, равнинна окръжност

Резюме: Получена е в явен вид матрицата на коравина на двустранно запънат дъгов краен елемент от равнинна окръжност. Елементът е с шест независими възлови параметъра. Възловите премествания на елемента в локалната координатна система са въведени по хордата му и по перпендикуляра към нея. Моделираният елемент е приложен за решение на запъната дъга – полуокръжност. Получените резултати са сравнени с резултати от решение на дъгата чрез вписване в нея на полигонална рамка. Направени са изводи и заключения.

1. Състояние на проблема

Аналитичното изследване на статически неопределими равнинни дъги, очертани по различни криви и с променливи характеристики на напречното сечение по метода на силите, макар и тривиално като задача, крие изчислителни затруднения. Те се преодоляват чрез въвеждане на често пъти противоречиви опростяващи предпоставки – [1].

Вариантите за избягване на изчислителните затруднения са няколко:

а/ Интегрирането на коефициентите δ_{ij} в матрицата на податливост при метода на силите да се извърши числено, при няколко последователни съгъстявания на интеграционната стъпка.

б/ Да се използва разширената форма на метода на преместванията (МКЕ) за равнинни рамки.

За тази цел в очертанието на дъгата се вписва полигонална рамка с праволинейни участъци, чиито върхове лежат върху оста на дъгата. Тази възможност изглежда ефективна, но в [1] с числен пример е показано, че

сходимостта на решението е бавна. При рядка възлова мрежа се наблюдават дори противоположни по знак резултати.

Още по-затруднен е изчислителният процес, когато полигоналната рамка е описана около действителната крива, тъй като тогава дискретизационните възли лежат “навън” от оста на дъгата.

в/ Най-целесъобразно е да се генерира елементната матрица на коравина за дъгов сегмент от съответната крива в произволно положение спрямо локалната координатна система и след трансформация към глобални координати, тази матрица да се препрати в общата. Такава задача ще предлага различни решения за дъгови елементи от различни криви.

Заявки за изясняване на проблема в случай на равнинна рамка, очертана по окръжност, се срещат у редица автори.

В [2] Образцов предлага матрицата на коравина $[k_{ij}]$ за дъгов елемент от окръжност да се получи като обратна на матрицата на податливост $[\delta_{ij}]$ за същия елемент, т. е. $[k_{ij}] = [\delta_{ij}]^{-1}$. Коефициентите δ_{ij} на подматрицата $[\delta_{ij}]$ са пресметнати в основна система, тип “конзола”, като единичните силови въздействия са въведени радиално и тангенциално в началния възел на елемента. Препоръчаното обръщане не е извършено експлицитно и се предполага, че при всяка процедура ще се извършва числово.

Gallager в [3] също дава подматрицата на податливост $[\delta_{ii}]$ за дъгов елемент от окръжност, като препоръчва обръщането ѝ до $[k_{ii}]$ да се извърши от читателя.

В програмната система ANSYS крайни елементи за дискретизация на равнинни криволинейни рамки се отнасят към раздела “pipe”-елементи, но матриците на коравина не са достъпни в явен вид.

2. Цел на изследването

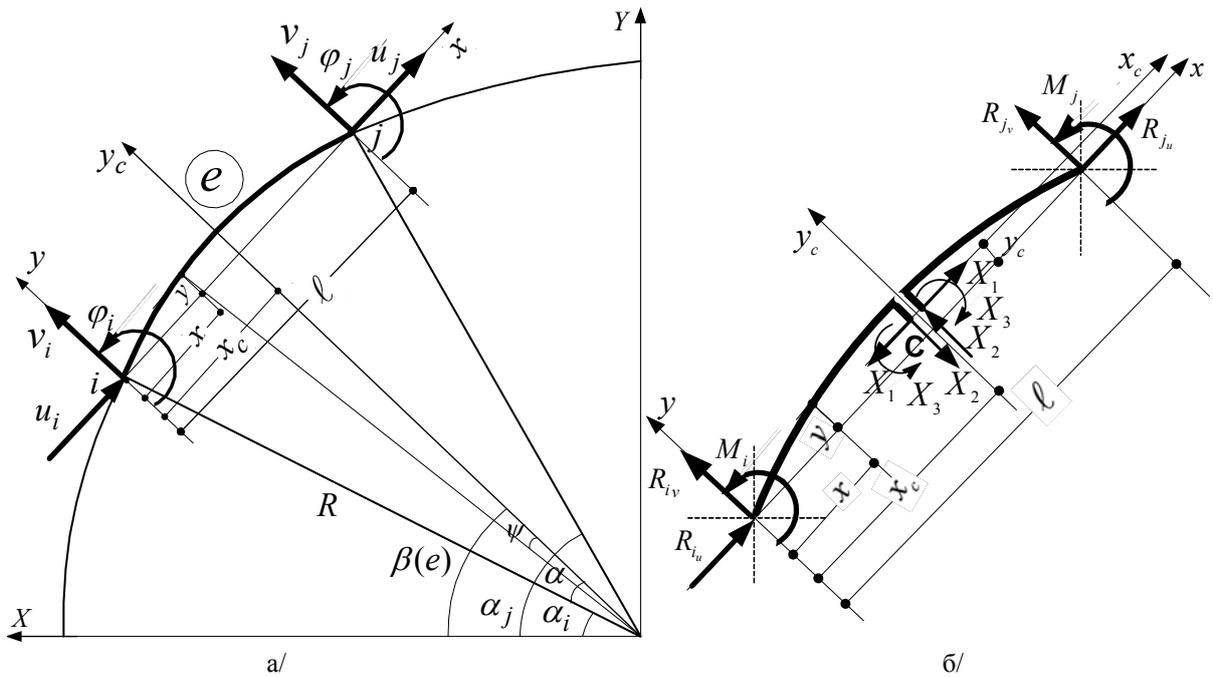
Да се генерира в явен вид матрицата на коравина $[k_{ij}]$ за двустранно запънат дъгов краен елемент от равнинна окръжност. При пресмятането на коефициентите ѝ да се отчита принос както на огъващите моменти, така и на нормалните усилия (случай на голяма кривина), $R \leq 5d$, където d е височина на напречното сечение, R - радиус на окръжността. Моделираният елемент да се приложи при изследване на равнинна дъга, очертана по окръжност.

3. Същност на изследването

Конструкцията се дискретизира на краен брой дъгови елементи през равни централни ъгли.

За разлика от цитираните автори [2], [3], ще въведем независимите възлови премествания в локалната координатна система $x-y$, насочена по хордата и перпендикулярно на нея – фиг. 1а/. Векторът на обобщените възлови премествания на елемента в локалната координатна система има вида

$$(1) \quad \{Z\}^T = [u_i \quad v_i \quad \varphi_i \quad u_j \quad v_j \quad \varphi_j]^T.$$



Фиг. 1

Геометрията на елемента и разположението му спрямо глобалната координатна система $X - Y$ е определено от величините

α_i - ъгъл, съответен на направлението на радиуса на началния възел на елемента;

α_j - ъгъл, съответен на направлението на радиуса на крайния възел на елемента;

$$\alpha = \frac{\alpha_j - \alpha_i}{2} - \text{централен ъгъл на елемента};$$

$\beta(e)$ - ъгъл между симетралата на елемента и глобалната ос X ;

ψ - текущ ъгъл спрямо симетралата;

Възловите сили на елемента

$$(2) \quad \{R\}^T = \{R_{iu} \quad R_{iv} \quad M_i \quad R_{ju} \quad R_{jv} \quad M_j\}$$

са означени на фиг. 1б. На същата фигура е показан центърът на еластичните тежести, който ще използваме в метода на силите за определяне на възловите реакции k_{ij} , предизвикани от единични обобщени възлови премествания.

Очевидни са следните геометрични зависимости.

$$(3) \quad \ell = 2 R \sin \alpha; \quad x(\psi) = R(\sin \alpha - \sin \psi); \quad y(\psi) = R(\cos \psi - \cos \alpha).$$

Определяне на координатите на еластичния център на елемента

$$x_c = R \sin \alpha; \quad y_c = \frac{\int_0^\alpha y(\psi) R d\psi}{\int_0^\alpha R d\psi} = R \frac{(\sin \alpha - \alpha \cos \alpha)}{\alpha};$$

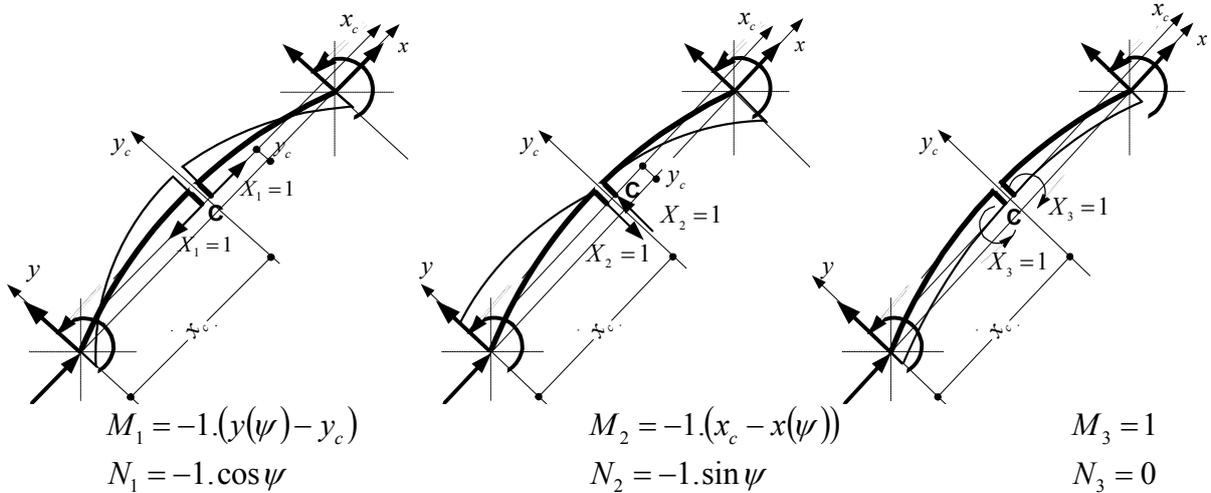
На същата фигура 1б са показани неизвестните X_1, X_2, X_3 , въведени в еластичния център. Състоянията $X_i = 1$ и съответните им моментни диаграми M_i са показани на фиг. 2а, б, в.

Единични състояния

Състояние $X_1 = 1$

Състояние $X_2 = 1$

Състояние $X_3 = 1$



Фиг. 2

Системата канонични уравнения за случая е

$$(4) \quad \begin{aligned} \delta_{11} X_1 + \Delta_{1d} &= 0 \\ \delta_{22} X_2 + \Delta_{2d} &= 0 \\ \delta_{33} X_3 + \Delta_{3d} &= 0. \end{aligned}$$

Коефициенти и свободни членове на каноничните уравнения от действие на обобщени възлови единични премествания

Коефициентите на каноничните уравнения

$EI\delta_{ii} = \sum \int M_i^2 ds + \frac{I}{A} \sum \int N_i^2 ds$ се определят по изразите

$$(5) \quad \begin{aligned} EI\delta_{11} &= 2 \left(\int_0^\alpha (y(\psi) - y_c)^2 R d\psi + \frac{I}{A} \int_0^\alpha (\cos \psi)^2 R d\psi \right) = \\ &= R^3 \frac{(\alpha \cos \alpha \sin \alpha + \alpha^2 - 2(\sin \alpha)^2)}{\alpha} + \frac{I}{A} R (\cos \alpha \sin \alpha + \alpha) ; \\ EI\delta_{22} &= 2 \left(\int_0^\alpha (x_c - x(\psi))^2 R d\psi + \frac{I}{A} \int_0^\alpha (\sin \psi)^2 R d\psi \right) = \\ &= -R^3 (\cos \alpha \sin \alpha - \alpha) - \frac{I}{A} R (\cos \alpha \sin \alpha - \alpha) \\ EI\delta_{33} &= 2 \int_0^\alpha R d\psi = 2 \alpha R. \end{aligned}$$

В табл. 1 са показани свободните членове на каноничните уравнения $EI\Delta_{id} = -EIR_{ij}\Delta_i$, където R_{ij} е реакция във възел i по направление на единичното преместване $\Delta_i = 1$, предизвикано от $X_j = 1$.

Табл. 1

	$u_i = 1$	$v_i = 1$	$\varphi_i = 1$	$u_j = 1$	$v_j = 1$	$\varphi_j = 1$
$EI\Delta_{1f}$	$-EI$	0	$y_c EI$	EI	0	$-y_c EI$
$EI\Delta_{2f}$	0	$-EI$	$-x_c EI$	0	EI	$-x_c EI$
$EI\Delta_{3f}$	0	0	EI	0	0	$-EI$

Реакции във възлите на крайния елемент по направление на обобщените възлови премествания от действие на единични обобщени възлови премествания

$$(6) \quad \begin{aligned} R_{i_u} &= X_1, & R_{j_u} &= -X_1, \\ R_{i_v} &= X_2, & R_{j_v} &= -X_2, \\ M_i &= X_2 x_c - X_1 y_c - X_3, & M_j &= X_1 y_c + X_2 x_c + X_3. \end{aligned}$$

Тези реакции съвпадат с търсените коефициенти от елементната матрица на коравина.

Матрица на коравина на дъговия елемент в локалната координатна система

Коефициентите от горната триъгълна подматрица на елементната матрица на коравина $[k] = EI [k_{ij}]$, $(k_{ij} = k_{ji})$, $(i, j = 1, 2, 3, 4, 5, 6)$ в локалната координатна система са

$$\begin{aligned} k_{11} &= \frac{\alpha}{\left(R^3 (\alpha \cos \alpha \sin \alpha + \alpha^2 - 2(\sin \alpha)^2) + \frac{I}{A} R \alpha (\cos \alpha \sin \alpha + \alpha) \right)}; \\ k_{12} &= 0; \quad k_{22} = \frac{-1}{\left(R^3 (\cos \alpha \sin \alpha - \alpha) + \frac{I}{A} R (\cos \alpha \sin \alpha - \alpha) \right)}; \\ k_{13} &= \frac{-R(\sin \alpha - \alpha \cos \alpha)}{R^3 (\alpha \cos \alpha \sin \alpha + \alpha^2 - 2(\sin \alpha)^2) + \frac{I}{A} \alpha R (\cos \alpha \sin \alpha + \alpha)}; \\ k_{23} &= \frac{-R \sin \alpha}{\left(R^3 (\cos \alpha \sin \alpha - \alpha) + \frac{I}{A} R (\cos \alpha \sin \alpha - \alpha) \right)}; \\ k_{33} &= \frac{R^2 (\sin \alpha - \alpha \cos \alpha)^2}{\left(R^3 \alpha (\cos \alpha \sin \alpha + \alpha^2 - 2(\sin \alpha)^2) + \frac{I}{A} \alpha^2 R (\cos \alpha \sin \alpha + \alpha) \right)} - \frac{R^2 (\sin \alpha)^2}{\left(R^3 (\cos \alpha \sin \alpha - \alpha) + \frac{I}{A} R (\cos \alpha \sin \alpha - \alpha) \right)} + \frac{1}{2\alpha R}; \\ k_{14} &= \frac{-\alpha}{\left(R^3 (\alpha \cos \alpha \sin \alpha + \alpha^2 - 2(\sin \alpha)^2) + \frac{I}{A} R \alpha (\cos \alpha \sin \alpha + \alpha) \right)}; \quad k_{24} = 0; \\ k_{34} &= \frac{R(\sin \alpha - \alpha \cos \alpha)}{R^3 (\alpha \cos \alpha \sin \alpha + \alpha^2 - 2(\sin \alpha)^2) + \frac{I}{A} R \alpha (\cos \alpha \sin \alpha + \alpha)}; \end{aligned}$$

$$k_{44} = \frac{\alpha}{R^3(\alpha \cos \alpha \sin \alpha + \alpha^2 - 2(\sin \alpha)^2) + \frac{I}{A} R \alpha (\cos \alpha \sin \alpha + \alpha)};$$

$$k_{15} = 0; \quad k_{25} = \frac{1}{R^3(\cos \alpha \sin \alpha - \alpha) + \frac{I}{A} R(\cos \alpha \sin \alpha - \alpha)};$$

$$(7) \quad k_{35} = \frac{R \sin \alpha}{R^3(\cos \alpha \sin \alpha - \alpha) + \frac{I}{A} R(\cos \alpha \sin \alpha - \alpha)}; \quad k_{45} = 0;$$

$$k_{55} = \frac{-1}{R^3(\cos \alpha \sin \alpha - \alpha) + \frac{I}{A} R(\cos \alpha \sin \alpha - \alpha)};$$

$$k_{16} = \frac{R(\sin \alpha - \alpha \cos \alpha)}{R^3(\alpha \cos \alpha \sin \alpha + \alpha^2 - 2(\sin \alpha)^2) + \frac{I}{A} \alpha R(\cos \alpha \sin \alpha + \alpha)};$$

$$k_{26} = \frac{-R \sin \alpha}{R^3(\cos \alpha \sin \alpha - \alpha) + \frac{I}{A} R(\cos \alpha \sin \alpha - \alpha)};$$

$$k_{36} = \frac{-R^2(\sin \alpha)^2}{\left(R^3 \cos \alpha \sin \alpha - R^3 \alpha + \frac{I}{A} R(\cos \alpha \sin \alpha - \alpha)\right)} - \frac{R^2(\sin \alpha - \alpha \cos \alpha)^2}{\left(R^3(\alpha \cos \alpha \sin \alpha + \alpha^2 - 2(\sin \alpha)^2) + \frac{I}{A} \alpha R(\cos \alpha \sin \alpha + \alpha)\right) \alpha} - \frac{1}{2\alpha R};$$

$$k_{46} = \frac{-R(\sin \alpha - \alpha \cos \alpha)}{R^3(\alpha \cos \alpha \sin \alpha + \alpha^2 - 2(\sin \alpha)^2) + \frac{I}{A} \alpha R(\cos \alpha \sin \alpha + \alpha)};$$

$$k_{56} = \frac{R \sin \alpha}{R^3(\sin \alpha \cos \alpha - \alpha) + \frac{I}{A} R(\cos \alpha \sin \alpha - \alpha)};$$

$$k_{66} = \frac{R^2(\sin \alpha - \alpha \cos \alpha)^2}{\left(R^3(\alpha \cos \alpha \sin \alpha + \alpha^2 - 2(\sin \alpha)^2) + \frac{I}{A} \alpha R(\cos \alpha \sin \alpha + \alpha)\right) \alpha} - \frac{R^2(\sin \alpha)^2}{\left(R^3(\cos \alpha \sin \alpha - \alpha) + \frac{I}{A} R(\cos \alpha \sin \alpha - \alpha)\right)} + \frac{1}{2\alpha R}.$$

Трансформацията на елементната матрица $[k]$ от локалната координатна система по хордата на елемента и нормалата към нея, към общата координатна система става чрез познатата трансформационна матрица $T_1(e)$

$$(8) \quad T_1(e) = \begin{bmatrix} \sin \beta(e) & \cos \beta(e) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\cos \beta(e) & \sin \beta(e) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sin \beta(e) & \cos \beta(e) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\cos \beta(e) & \sin \beta(e) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Формирането на матрицата на коравина и на вектора на възловите сили на конструкцията се извършва по обичайната за метода на крайните елементи процедура. Определя се векторът на **обожените възлови премествания на конструкцията** в общата координатна система.

За получаване на разрезните усилия в елемента е необходимо независимите възлови параметри от локалната координатна система (хорда, нормала към нея) да се трансформират в координатна система (тангента в началния възел на елемента, нормала в началния възел на елемента). Това се извършва посредством трансформационната матрица $T_2(e)$

$$(9) \quad T_2(e) = \begin{bmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\sin \alpha & \cos \alpha & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cos \alpha & -\sin \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

След трансформиране на вектора на възловите сили на елемента от хордата и перпендикуляра към нея към тангентата и нормалата във възлите на криволинейния елемент се получават усилията в запънатата дъга.

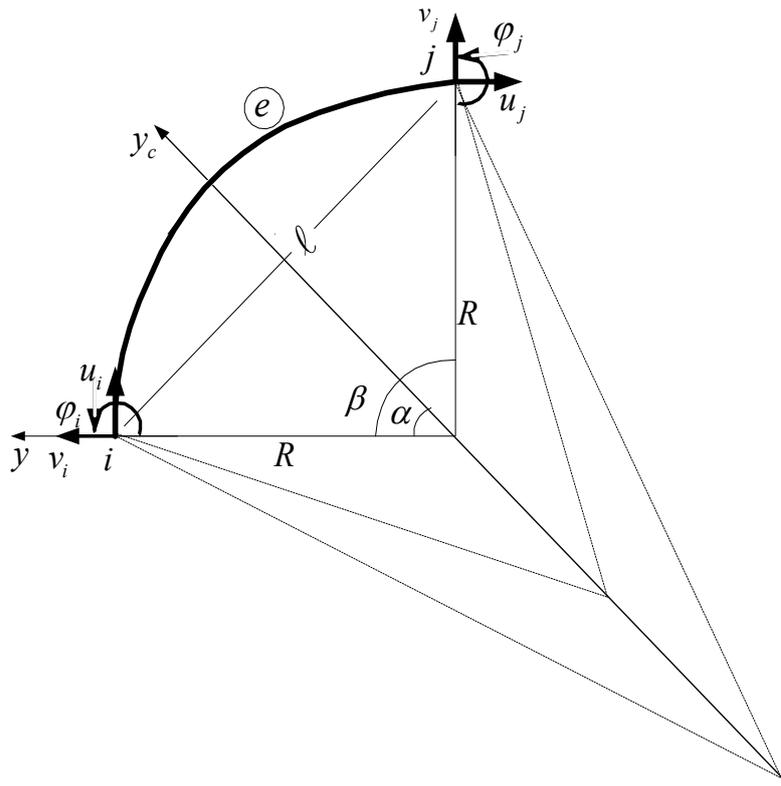
4. Числена реализация. Анализ и сравнениена резултатите

Проверка на верността на получените изрази за коефициентите k_{ij}

Тя се извършва като се проследи изменението на стойностите на коефициентите на изведената матрица при намаляване на централния полуъгъл α и се установи при каква стойност на α матрицата на коравина на “плоския” криволинейен дъгов елемент практически не се отличава от матрицата на коравина на съответния гредови елемент с дължина, равна на хордата на плоския дъгов елемент.

Така може да се формулира количествен критерий при каква гъстота на възловата дискретизационна мрежа без съществена грешка вместо дъгови крайни елементи би могло да се използва вписана полигонална рамка.

За целта като се използват получените изрази (7), се съставят числово матриците на коравина за дъговия елемент от фиг. 3. Варира се централния ъгъл β от 90° до 0° като се запазва дължината на опорната хорда $\ell = 10 \text{ m}$; Получените числови матрици се сравняват с числовата матрица на коравина на гредови елемент със същата дължина.



Фиг. 3

Модулът на еластичността и коефициента на Поасон на материала за двата елемента са съответно $E = 2,5 \cdot 10^7 \text{ kN/m}^2$, $\nu = 0,167$. Дължината на елемента е $\ell = 10 \text{ m}$, ширината и височината на напречното сечение на елемента са съответно $b = 0,8 \text{ m}$, $h = 1,6 \text{ m}$.

Общият вид на матрицата на коравина на праволинейния прътов елемент е

$$(10) \quad [k] = \frac{EI}{\ell^3} \begin{bmatrix} \frac{A}{I} \ell^2 & 0 & 0 & -\frac{A}{I} \ell^2 & 0 & 0 \\ 0 & 12 & 6\ell & 0 & -12 & 6\ell \\ 0 & 6\ell & 4\ell^2 & 0 & -6\ell & 2\ell^2 \\ -\frac{A}{I} \ell^2 & 0 & 0 & \frac{A}{I} \ell^2 & 0 & 0 \\ 0 & -12 & -6\ell & 0 & 12 & -6\ell \\ 0 & 6\ell & 2\ell^2 & 0 & -6\ell & 4\ell^2 \end{bmatrix}.$$

Числов вид на матрицата на коравина на праволинейния 3d прътов краен елемент

$$[k] = \begin{bmatrix} 3,2 \cdot 10^6 & 0 & 0 & -3,2 \cdot 10^6 & 0 & 0 \\ 0 & 8,192 \cdot 10^4 & 4,096 \cdot 10^5 & 0 & -8,192 \cdot 10^4 & 4,096 \cdot 10^5 \\ 0 & 4,096 \cdot 10^5 & 2,7307 \cdot 10^6 & 0 & -4,096 \cdot 10^5 & 1,365 \cdot 10^6 \\ -3,2 \cdot 10^6 & 0 & 0 & 3,2 \cdot 10^6 & 0 & 0 \\ 0 & -8,192 \cdot 10^4 & -4,096 \cdot 10^5 & 0 & 8,192 \cdot 10^4 & -4,096 \cdot 10^5 \\ 0 & 4,096 \cdot 10^5 & 1,3653 \cdot 10^6 & 0 & -4,096 \cdot 10^5 & 2,7307 \cdot 10^6 \end{bmatrix}.$$

Числов вид на матрицата на коравина на очертан по окръжност $3d$ прътов краен елемент

$$\beta = \frac{\pi}{2} = 1,5708, \quad \alpha = \frac{\pi}{4} = 0,7854, \quad R = 7,071 \text{ m},$$

$$[k] = \begin{bmatrix} 1,0944 \cdot 10^6 & 0 & -1,4952 \cdot 10^6 & -1,0944 \cdot 10^6 & 0 & 1,4952 \cdot 10^6 \\ 0 & 6,7368 \cdot 10^4 & 3,3684 \cdot 10^5 & 0 & -6,7368 \cdot 10^4 & 3,3684 \cdot 10^5 \\ -1,4952 \cdot 10^6 & 3,3684 \cdot 10^5 & 4,3415 \cdot 10^6 & 1,4952 \cdot 10^6 & -3,3684 \cdot 10^5 & -9,7314 \cdot 10^5 \\ -1,0944 \cdot 10^6 & 0 & 1,4952 \cdot 10^6 & 1,0944 \cdot 10^6 & 0 & -1,4952 \cdot 10^6 \\ 0 & -6,7368 \cdot 10^4 & -3,3684 \cdot 10^5 & 0 & 6,7368 \cdot 10^4 & -3,3684 \cdot 10^5 \\ 1,4952 \cdot 10^6 & 3,3684 \cdot 10^5 & -9,7314 \cdot 10^5 & -1,4952 \cdot 10^6 & -3,3684 \cdot 10^5 & 4,3415 \cdot 10^6 \end{bmatrix},$$

...

$$\beta = \frac{\pi}{18000000} = 1,75 \cdot 10^{-7}, \quad \alpha = \frac{\pi}{36000000} = 8,73 \cdot 10^{-8}, \quad R = 5,7296 \cdot 10^7 \text{ m},$$

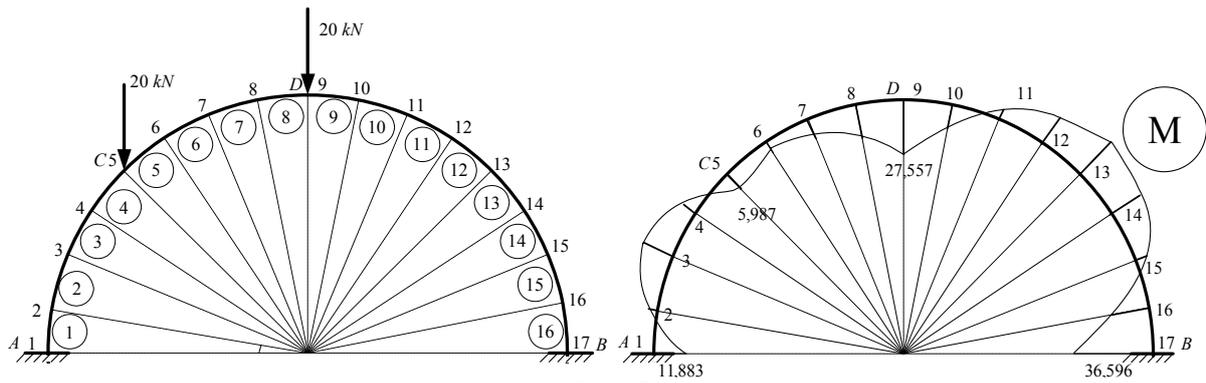
$$[k] = \begin{bmatrix} 3,2 \cdot 10^6 & 0 & -0,4727 & -3,2 \cdot 10^6 & 0 & 0,4727 \\ 0 & 8,5333 \cdot 10^4 & 4,2667 \cdot 10^5 & 0 & -8,5333 \cdot 10^4 & 4,2667 \cdot 10^5 \\ -0,4727 & 4,2667 \cdot 10^5 & 2,816 \cdot 10^6 & 0,4727 & -4,2667 \cdot 10^5 & 1,4507 \cdot 10^6 \\ -3,2 \cdot 10^6 & 0 & 0,4727 & 3,2 \cdot 10^6 & 0 & -0,4727 \\ 0 & -8,533 \cdot 10^4 & -4,2667 \cdot 10^5 & 0 & 8,533 \cdot 10^4 & -4,2667 \cdot 10^5 \\ 0,4727 & 4,2667 \cdot 10^5 & 1,4507 \cdot 10^6 & -0,4727 & -4,2667 \cdot 10^5 & 2,816 \cdot 10^6 \end{bmatrix}.$$

Стойностите на коефициентите от МК на очертания по окръжност $3d$ прътов краен елемент клонят към стойностите на съответните коефициенти на праволинейния елемент. Прави впечатление, че сходимостта на коефициента k_{13} е значително по-бавна от тази на коефициентите k_{11} , k_{22} , k_{33} .

Вижда се, че при дискретизация с плоски дъгови елементи, отговарящи на централен полуъгъл $\alpha = 7,5^\circ$ $\beta = 15^\circ$, замяната им с полигонално вписани в дъгата криволинейни гредови елементи, практически не се отразява на стойностите на коефициентите k_{ij} от елементната матрица на коравина, а оттам и на точността на решението на дъгата.

Числен пример

За да проверим получените оператори ще сравним решението чрез моделирания краен елемент на запъната дъга – полуокръжност с това на същата дъга, решена в [1] чрез вписване на полигонална рамка. Тя е показана на фиг. 5. Радиусът на дъгата е $R = 10 \text{ m}$. Напречното сечение на дъгата е с размери $b = 0,8 \text{ m}$, $h = 1,6 \text{ m}$. Модулът на еластичността и коефициента на Поасон на материала са съответно $E = 2,5 \cdot 10^7 \text{ kN/m}^2$, $\nu = 0,167$.



Фиг. 5

На същата фигура е показана моментова диаграма, получена в [1], чрез вписване в дъгата на полигонална рамка със 17 възела и 16 праволинейни участъка.

Извършено е решение на дъгата чрез използване на криволинейния дъгов елемент от окръжност. Резултатите, получени при дискретизация с 4, 8 и 16 елемента (17 възела) са показани в табл. 2 и табл. 3. Очевидно е, че при използване на $n=8$ кръгови елемента на практика се постига точността, която при прилагане на полигонална рамка изисква двойно повече възли.

Табл. 2

Възел №	Решение по МКЕ с дъговия краен елемент								
	Премествания								
	4			8			16		
	$u_i(x)$	$w_i(x)$	$\varphi_i(x)$	$u_i(x)$	$w_i(x)$	$\varphi_i(x)$	$u_i(x)$	$w_i(x)$	$\varphi_i(x)$
1	0,000	0,000	0,000	0,0000	0,0000	0,0000	0,000	0,000	0,000
2							-1,752e-6	-1,605e-6	7,011e-7
3				-1,0415e-6	-3,883e-6	-2,430e-6	-1,041e-6	-3,883e-6	-2,430e-6
4							5,499e-6	-9,644e-6	-6,016e-6
5	1,452e-5	-1,943e-5	-6,665e-6	1,4523e-5	-1,9432e-5	-6,6645e-6	1,452e-5	-1,943e-5	-6,665e-6
6							2,122e-5	-2,896e-5	-5,334e-6
7				2,4863e-5	-3,7632e-5	-4,1032e-6	2,486e-5	-3,763e-5	-4,103e-6
8							2,576e-5	-4,332e-5	-1,326e-6
9	2,489e-5	-4,084e-5	4,585e-6	2,4891e-5	-4,0839e-5	4,5848e-6	2,489e-5	-4,084e-5	4,585e-6
10							2,566e-5	-2,610e-5	9,465e-6
11				3,0262e-5	-7,6440e-6	9,1907e-6	3,026e-5	-7,644e-6	9,191e-6
12							3,623e-5	5,931e-6	5,466e-6
13	3,883e-5	1,103e-5	1,273e-7	3,8829e-5	1,1030e-5	1,2726e-7	3,883e-5	1,103e-5	1,273e-7
14							3,427e-5	8,852e-6	-4,927e-6
15				2,2294e-5	3,6914e-6	-7,8108e-6	2,229e-5	3,691e-6	-7,811e-6
16							7,652e-6	1,704e-7	-6,719e-6
17	0,000	0,000	0,000	0,0000	0,0000	0,0000	0,000	0,000	0,000

Табл. 3

Въ- зел №	Решение по МКЕ с дъговия краен елемент								
	Усилия								
	4			8			16		
	$N_i(x)$	$Q_i(x)$	$M_i(x)$	$N_i(x)$	$Q_i(x)$	$M_i(x)$	$N_i(x)$	$Q_i(x)$	$M_i(x)$
1	28,17	-12,544	-12,907	28,1695	-12,5441	-12,9067	28,17	-12,544	-12,907
2							-30,076 30,076	6,807 -6,807	-6,153 6,153
3				-30,8257 30,8257	0,8092 -0,8092	-13,6548 13,6548	-30,826 30,826	0,809 -0,809	-13,655 13,655
4							-30,391 30,391	-5,22 5,22	-9,31 9,31
5	-28,789 14,647	-11,049 -3,093	6,713 -6,713	-28,7889 14,6468	-11,0488 -3,0933	6,7131 -6,7131	-28,789 14,647	-11,049 -3,093	6,713 -6,713
6							-14,969 14,969	0,176 -0,176	3,493 -3,493
7				-14,7156 14,7156	-2,7472 2,7472	6,0247 -6,0247	-14,716 14,716	-2,747 2,747	6,025 -6,025
8							-13,897 13,897	-5,565 5,565	14,212 -14,212
9	-12,544 12,544	-8,17 -11,83	27,74 -27,74	-12,5441 12,5441	-8,1695 -11,8305	27,7396 -27,7396	-12,544 12,544	-8,17 -11,83	27,74 -27,74
10							-14,611 14,611	9,156 -9,156	7,07 -7,07
11				-16,1166 16,1166	6,1295 -6,1295	-7,985 7,985	-16,117 16,117	6,129 -6,129	-7,985 7,985
12							-17,003 17,003	2,868 -2,868	-16,846 16,846
13	-17,235 17,235	-0,505 0,505	-19,173 19,173	-17,2354 17,2354	-0,5046 0,5046	-19,1735 19,1735	-17,235 17,235	-0,505 0,505	-19,173 19,173
14							-16,806 16,806	-3,857 3,857	-14,877 14,877
15				-15,7303 15,7303	-7,0619 7,0619	-4,1226 4,1226	-15,73 15,73	-7,062 7,062	-4,123 4,123
16							-14,05 14,05	-9,995 9,995	12,677 -12,677
17	-11,83	-12,544	34,876	-11,8305	-12,5441	34,8763	-11,83	-12,544	34,876

5. Изводи и заключения

Анализът и сравнението на получените резултати показват следното:

Резултатите, получени от решението на равнинната дъга с използване на полигонално очертана вписана рамка с 16 праволинейни участъка и при дискретизация с 8 криволинейни крайни елемента приблизително съвпадат. Използването на криволинейния 3d прътов краен елемент води до практически точно решение.

Литература

- [1]. Банков, Б., Строителна статика, ч. II., София., УАСГ, 2001 г.
- [2]. Образцов И. Ф., Л. М. Савелъев, Х. С. Хазанов, Метод конечных элементов, Москва, 1985г.
- [3]. Gallager R. H., Finite Element Analysis, Fundamentals, New Jersey, 1975г.

STIFFNESS MATRIX OF DOUBLE-SIDED FIXED ARC FINITE ELEMENT OF A PLANE CIRCUMFERENCE

Banko P. Bankov, Liliya B. Petrova

Bankov@vsu.bg, lbphr_sf_bg@yahoo.com

*VSU “L. Karavelov”, 175 Suhodolska Street, Sofia 1373,
VTU “T. Kableshkov”, 158 Geo Milev Street, Sofia 1574
Bulgaria*

Key words: *arch finite element fixed at both ends, plane circumference*

Abstract: *The stiffness matrix of a double-sided fixed arc finite element of a plane circumference has been obtained in an explicit kind. The element is of six independent node parameters. The node displacements of the element in the local coordinate system have been introduced along the chord and the perpendicular towards it. The element modeled has been applied to solve a fixed arc, semi-circumference. The results obtained have been compared to the results of the salutation of the arc by inscribing a polygonal frame in it. Deductions and conclusions have been drawn.*