**Механика
Транспорт
Комуникации**

Научно списание

ISSN 1312-3823
брой 2, 2006 г.
статия № 0072
http://www.mtc-aj.com

ОГЪВНИ ТРЕПТЕНИЯ НА ДВУСТАВНА ГРЕДА ПРИ КИНЕМАТИЧНО СМУЩЕНИЕ ПРИ ОПОРИТЕ

Валентин Недев
val_nedev@abv.bg

ВТУ "Тодор Каблешков", София, ул. "Гео Милев" №158, София България

Ключови думи: *трептения, хармоничен анализ, континуални системи.*

Резюме: *Чрез методите на хармоничния анализ (синус-преобразуване на Фурие) е получено решение за напречните огъвни трептения на еластична греда при кинематично смущение в опорите. Полученото решение позволява да се проведе динамично якостно и деформационно изследване на греди или конструкции моделирани, като такива при посоченото въздействие.*

ВЪВЕДЕНИЕ

Трептенията на системи с разпределени маси, породени от силови смущения, се описват от нехомогенни диференциални уравнения с хомогенни гранични условия. Решаването на тези уравнения се извършва по класическите методи на разделяне на променливите или с методите на операционното смятане. При кинематични смущения, обаче, движението на системата се описва чрез хомогенни диференциални уравнения с нехомогенни гранични условия. Някои автори [4,5,6] са решили задачи от този тип с помощта на трудоемки математически преобразувания. Чрез тях уравненията на трептенията се трансформират в нехомогенни, а граничните условия – в хомогенни. По-нататък задачата се решава по обикновените начини.

През последните години е предложен метод [1,2] за анализ на дискретно-континуални системи, позволяващ ефективно разделяне на регионалните от микро - движенията при използване на понятието центрова ос и съответно опростяване на математическия модел. Същият може да се приложи при анализа на трептенията на сходни конструкции.

В настоящата работа, върху пример за огъвни трептения на греда, породени от кинематично смущение в краищата, ще покажем, че за решението на подобни задачи може непосредствено да се приложат методите на хармоничния анализ и в частност на синус – преобразуванието на Фурие с крайни граници. Ще отбележим, че при решението на подобни задачи със съответни гранични условия в зависимост от конкретните условия на задачите, може да се използват и методите на операционното смятане.

Необходимостта от решаване на такива задачи в теорията на сеизмичното проектиране и строителство възниква при изучаването на трептенията на елементи на сгради и съоръжения, стъпващи върху трептяща основа, в частност при отчитане на податливостта на плочи във вертикална равнина [5]. При това плочата се представя във вид на греда – ивица с равномерно разпределено натоварване и ставно подпрени краища. Този модел с достатъчна точност съответства на реалните свойства на конструкциите на зданието или съоръжението.

ПОСТАНОВКА НА ЗАДАЧАТА

Нека опорните сечения на гредата $x=0$ и $x=\ell$ се преместват по закона $f=f(t)$. Тогава гредата ще извършва огъвни трептения, при които уравнението на движението на произволно сечение може да се запише във вида

(1) $$\frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial t^2}+b^2\frac{\partial^4 w(x,t)}{\partial x^4}=0,$$

където:

- $w(x,t)$ – преместване на произволно сечение на гредата;
- $b^2=EJ/m$;
- E – модул на еластичността;
- J – инерционен момент на сечението спрямо главната централна ос, перпендикулярна на равнината на трепнете;
- m – масата за единица дължина от гредата.

Граничните условия с оглед закрепването в краищата имат вида:

(2) $$\left|\begin{array}{l} w(0,t)=f(t); \\ \dfrac{\partial^2 w(0,t)}{\partial x^2}=0; \\ w(\ell,t)=f(t); \\ \dfrac{\partial^2 w(\ell,t)}{\partial x^2}=0. \end{array}\right.$$

Началните условия може да приемем нулеви, т.е.

(3) $$w(x,0)=b^2\frac{\partial w(x,0)}{\partial x}=0.$$

За решението на уравнение (1) при условията (2) и (3) прилагаме синус - преобразувание на Фурие с крайни граници по координатата x [3]. Като умножим всеки член на уравненията (1) и (3) със $\sin\frac{i\pi x}{\ell}$ и интегрираме в граници от 0 до ℓ (условията (2) се удовлетворяват автоматично), получаваме обикновеното нехомогенно диференциално уравнение от втори ред

$$\begin{aligned}\ddot{v}_i(t)+b^2\left(\frac{i\pi}{\ell}\right)^4 v_i(t)&= \\ =b^2\left(\frac{i\pi}{\ell}\right)^3\left(1-\cos(i\pi)\right)f(t),&\end{aligned} \tag{4}$$

с начални условия:

$$v_i(0)=\dot{v}_i(0)=0\,. \tag{5}$$

Решението на уравнение (4) с нулевите начални условия (5) е известно и има вида

$$v_i(t)=\frac{bi\pi}{\ell}\left(1-\cos i\pi\right)\int_o^t f(\tau)\sin\omega_i(t-\tau)d\tau\,, \tag{6}$$

където

$$\omega_i=b\left(\frac{i\pi}{\ell}\right)^2.$$

Като се възползваме от теоремата за обръщане на синус - преобразуванието на Фурие с крайни граници

$$w(x,t)=\frac{2}{\ell}\sum_{i=1}^{\infty}v_i(t)\sin\frac{i\pi x}{\ell}\,, \tag{7}$$

след преобразувания получаваме окончателното решение на разглежданата задача във вида

$$w(x,t)=f(t)-4\sum_{i=1}^{\infty}\left\{\begin{array}{l}\dfrac{\sin\dfrac{(2i-1)\pi x}{\ell}}{(2i-1)\pi\omega_i}\times \\ \times\displaystyle\int_0^t\ddot{f}(\tau)\sin\omega_i(t-\tau)d\tau\end{array}\right\}, \tag{8}$$

където $\omega_i=b\left(\frac{(2i-1)\pi}{\ell}\right)^2$.

С помощта на формула (8) поставената задача е решена напълно, тъй като от нея могат да се определят всички кинематични и силови фактори, свързани с трептенията на гредата при зададено кинематично смущение в точките на закрепване. Например, относителните скорост и ускорение можем да получим чрез диференциране по времето t на функцията на преместванията (8), а огъващите моменти и срязващите сили – чрез диференциране на същата функция по координатата x.

ИЗВОДИ

От изложеното се вижда, че приложението на методите на хармоничния анализ при решаването на задачата за огъвните трептения на греда при кинематично смущение дава резултат във вид, удобен за практическо приложение.

Полученото решение (8) обхваща случаите, достатъчно отдалечени от резонансните зони.

ЛИТЕРАТУРА:

[1.] Колев П., Метод на центровите оси в еластодинамиката на манипулационни системи (Автореф. на дисерт. труд за присъждане на науч. степен “Доктор на техн. науки”), София, 2003.

[2.] Колев П., А. Манолова, Динамичен анализ на двузвенен манипулационен робот при зададени програмни регионални движения – част I, Механика на машините, №40, Изд. ТУ-Варна, 2001.

[3.] Снедден И., Преобразувание Фурье, Москва, 1955.

[4.] Тимошенко С.П., Колебания в инженерном деле, Москва, 1967.

[5.] Рассказовский В.Т., Мукук Л.К., Уравнение вертикальных колебаний зданий с учетом деформаций перекрытий и оснований, Ивз. АН УзССР, Сер. техн. наук, 1977, №6.

[6.] Mindlin R.D., Godman L.E., Journal of Applied Mechanics, t.17, No.4, 1950.

BENDING OSCILLATIONS OF BI-JOINT BEAM WITH KINEMATICAL PERTURBATION UNDER FULCRUMS

Valentin Nedev

Higher Transport school “T. Kableshkov”
Bulgaria, Geo Milev str. 158

Key words: *oscillations, harmonic analysis, continual systems.*

Abstract*: The solution for the cross-bend oscillations of the elastic beam under cinematic perturbation in the supports is obtained by the methods of the harmonic analysis (Fourier sine transformation). On the base of the obtained solution, the dynamical-robustness and the deformed investigation of beams or structures (modeled at the same perturbation) can be realized.*