Mechanics Transport Communications

Academic journal

ISSN 1312-3823

issue 3, 2011

article № 0620

http://www.mtc-aj.com

ВЪРХУ ТРАНСЦЕНДЕНТНИ РАЗШИРЕНИЯ СЪС СТЕПЕН НА ТРАНСЦЕНДЕНТНОСТ 1

Емил Иванов

skagrra@yahoo.com

Главен асистент, ВТУ „Тодор Каблешков", гр.София, ул. „Гео Милев"158

БЪЛГАРИЯ

Резюме: *Нека* k *е произволно поле и елементът* x *е трансцендентен над* k. *Нека* $\rho = \rho(x) = \dfrac{F(x)}{G(x)}, (F,G) = 1$. *Дефинираме* $\delta(\rho) = \max(\deg F, \deg G)$. *После нека имаме рационална функция с коефициенти от* k $R = R(u) = \dfrac{P(u)}{Q(u)}, (P,Q) = 1$. *Образуваме* $R \circ \rho := R(\rho(x))$. *Основният резултат на статията е следният:* $\delta(R \circ \rho) = \delta(R).\delta(\rho)$. *Иначе казано, функцията* δ *е мултипликативна.*

Ключови думи: *мултипликативност, степен на трансцендетност.*

Твърдението не е ново, ново е само (надявам се) доказателството, и донякъде формулировката. Известното доказателство на твърдението използва понятия и теореми от теорията на полетата, например понятието „степен на (алгебрично) разширение".Освен това , докато при предлаганото тук в статията доказателство се работи с полиноми на една променлива, в известното доказателство се използват полиноми на две променливи, което изисква по-дълбок математически апарат. С две думи: претенциите на настоящата статия се свеждат до това, че се предлага доказателство, използващо по-прости математически понятия и твърдения. Обективността задължава да кажем, че това „опростяване" си има цена, а именно: в доказателството се „разглеждат случаи", което го прави, да се изразим така, „не особено естетично". Но това е обичайно явление в математиката – използването на по-абстрактни понятия често позволява да се получават доказателства с по-прегледна структура.

Преминаваме към кратко излагане на основната идея на доказателството.

Преди всичко ще въведем кратки означения, които ще използваме в доказателството.

$\deg(P) = p, \quad \deg(Q) = q, \quad \deg(F) = f, \quad \deg(Q) = q.$

Доказателството е структурирано по следния начин: първо се разглеждат по-прости частни случаи на твърдението, които после се използват при доказателството на по-сложните частни случаи и накрая получаваме твърдението в пълната му общност.

1. Най-простият частен случай $R = P$ е полином $(Q = 1)$ и $\rho = F$ е полином $(G = 1)$е практически тривиален (δ съвпада с $\deg$, а от свойството на $\deg$

$$\deg(P \circ F) = \deg(P).\deg(F)$$

лесно следва исканото твърдение) . Все пак струва си да отбележим, че при следващите по-сложни разглеждания ще се възползваме от този случай, като, разбира се, ще привлечем и други съображения.

2. $\rho = F$ е полином $(G = 1)$

В този случай $R \circ \rho = \dfrac{P \circ F}{Q \circ F} := \dfrac{P_1}{Q_1}$. Тук проблемът е да се убедим, че това е **<u>несъкратимата</u>** форма на $R \circ \rho$, т.е. че $(P_1, Q_1) = 1$. За целта ще използваме $(P, Q) = 1$ и ще се възползваме и от **<u>теоремата на Безу</u>** (валидна за полиноми на една, но не и на повече променливи!). Именно тази теорема лесно ни дава възможност от $(P, Q) = 1$ да извлечем и нужното ни $(P_1, Q_1) = 1$.

Тук ще дам малко повече подробности, понеже това просто само по себе си разсъждение по-нататък - при разглеждането на случай 4. - ще бъде приспособено към по-сложна ситуация.

<u>Теоремата на Безу</u> гласи: $(P, Q) = 1 \Rightarrow$ съществуват полиноми A и B на една променлива u, за които е в сила тъждеството $A.P + B.Q = 1$, или по-подробно $A(u).P(u) + B(u).Q(u) = 1$. Сега „ще положим” в това полиномиално тъждество $u = \rho (= F)$ и получаваме вече тъждеството „с променлива x” $A_1.P_1 + B_1.Q_1 = 1$, (тук за краткост съм означил $A_1 = A \circ \rho$ и $B_1 = B \circ \rho$ аналогично на P_1 и Q_1). Следователно исканото свойство $(P_1, Q_1) = 1$ е налице (това е „обратната”, фактически тривиална , теорема на Безу).

След това вече прилагаме известното ни от случай 1. към числителя P_1 и към знаменателя Q_1 и получаваме нужното ни твърдение.

3. $R = P$ е полином ($Q = 1$) .

При разглеждането на този частен случай вече се проявяват трудностите, които са следствие на избрания от нас „по-елементарен подход” и за които споменахме кратко по-горе: „не особено естетично” разглеждане на подслучаи и под-подслучаи. С цел да избегна неразумното увеличаване на обема на статията

Да въведем тук още и следните означения.

Нека с F_0 и G_0 да означим старшите коефициенти на F и G съответно. Нека още $P(u) = a_0 u^p + \cdots + a_k u^{p-k}$,$0 \le k \le p$,$a_k \ne 0$.По-нататък

$$P(\rho) = (\cdots) = \frac{a_0 F(x)^p + \cdots + a_k F(x)^{p-k} G(x)^k}{G(x)^p} = \frac{a_0 F^p + \cdots + a_k F^{p-k} G^k}{G^p} := \frac{P_1}{P_2}.$$

При това от $(F, G) = 1$ лесно следва, че $(P_1, P_2) = 1$, т.е. че това е **<u>несъкратимата</u>** форма на $R \circ \rho := R(\rho(x)) = P(\rho(x))$. И така,

$$P \circ \rho = \frac{P_1}{P_2} \ ,P_1 = a_0 F^p + \cdots + a_k F^{p-k} G^k \ ,P_2 = G^p \ , p = \deg(P), \delta(P \circ \rho) = \max(\deg(P_1), \deg(P_2)).$$

Очевидно е, че $\deg(P_2) = p.g$. Проблемите тук се съдържат в пресмятането на $\deg(P_1)$.

Сега вече можем да опишем подслучаите и под-подслучаите, които се налага да разгледаме, а именно:

3.1. $f > g$. Този подслучай е най-лесен - $\deg(P_1) = p.f$ и оттам желаното твърдение следва веднага.

3.2. $f = g := h$

Тук се налага разглеждане на два под-подслучая:

3.2.1. $P(\dfrac{F_0}{G_0}) \ne 0$. В този под-подслучай се доказва , че $\deg(P_1) = p.h (= p.f = p.g)$, откъдето исканото твърдение следва лесно и

3.2.2. $P(\frac{F_0}{G_0})=0$. В този под-подслучай се доказва , че $\deg(P_1)<p.h(=p.f=p.g)$, откъдето също лесно извеждаме нужното ни твърдение.

3.3. $f<g$

И тук се налага разглеждане на два под-подслучая:

3.3.1. $P(0)\neq 0$. В този под-подслучай се доказва , че $\deg(P_1)=p.g$,откъдето извеждаме и исканото твърдение и

3.3.2. $P(0)=0$. Ще напомня, че $P(u)=a_0u^p+\cdots+a_ku^{p-k}$,$0\leq k\leq p$,$a_k\neq 0$, но тук можем да уточним $0\leq k<p$. В този под-подслучай се доказва , че $\deg(P_1)=k.g+(p-k).f$;$\deg(P_1)<k.g+(p-k).g$;$\Rightarrow \deg(P_1)<p.g$. Оттук пак лесно извеждаме нужното ни твърдение.

С това разглеждането на случай 3 е приключено.

Смятам, че от изложеното дотук наистина добре се виждат трудностите – следствие на избрания „елементарен подход", които трябва да се преодоляват, както и стилът на доказателствата в статията.

Остана неразгледан „общият" случай

4. R не е полином и ρ не е полином.

Предварително ще кажа, че се той разглежда по начин, подобен на вече изложените, като техническите трудности и разглежданията на подслучаи и под-подслучаи за жалост са още по-изобилни, макар и принципно да не са по-сложни.

Нека, както и в случай 3., да въведем следните съкратени означения :

$$P(\rho)=(\cdots)=\frac{a_0F(x)^p+\cdots+a_kF(x)^{p-k}G(x)^k}{G(x)^p}=\frac{a_0F^p+\cdots+a_kF^{p-k}G^k}{G^p}:=\frac{P_1}{P_2}.$$

И аналогично за Q

$$Q(\rho)=(\cdots)=\frac{b_0F(x)^q+\cdots+a_lF(x)^{q-l}G(x)^l}{G(x)^q}=\frac{a_0F^q+\cdots+a_lF^{q-l}G^l}{G^q}:=\frac{Q_1}{Q_2}.$$

Използвайки тези означения, получаваме

$$R(\rho)=(\cdots)=\frac{a_0F(x)^p+\cdots+a_kF(x)^{p-k}G(x)^k}{G(x)^p}.\frac{G(x)^q}{b_0F(x)^q+\cdots+a_lF(x)^{q-l}G(x)^l}=$$

$$=\frac{a_0F^p+\cdots+a_kF^{p-k}G^k}{G^p}.\frac{G^q}{b_0F^q+\cdots+a_lF^{q-l}G^l}:=\frac{P_1}{P_2}.\frac{Q_2}{Q_1}.$$

Сега „първата ни грижа" ще бъде да установим $(P_1,Q_1)=1$.Това ще се получи като следствие от $(P,Q)=1$, разбира се, и то пак по метода от случай 2. (Безу!), но с някои допълнителни леки усложнения.Тези усложнения се получават оттам, че в „тъждеството на Безу" $A(u).P(u)+B(u).Q(u)=1$ ще положим не , както в случай 2., $u=F$ (полином), а $u=\rho(=\frac{F}{G})$ (**<u>рационална функция</u>** на x). Нека първо означим за краткост

$\deg(A)=a$,$\deg(B)=b$. От тъждеството на Безу следва $a+p=b+q$.Следователно в резултат на полагането $u=\rho(=\frac{F}{G})$ тъждеството (с променлива u)ще даде следното рационално (т.е. **<u>дробно</u>** !) тъждество : $\frac{A_1}{G^a}.\frac{P_1}{G^p}+\frac{B_1}{G^b}.\frac{Q_1}{G^q}=1$ (тук A_1 и B_1 се получават съответно от A и B както P_1 и Q_1 съответно от P и Q) , откъдето $A_1.P_1+B_1.Q_1=G^c$.

В последното тъждество е използвано съкратеното означение $c=a+p=b+q$ (виж по-горе).Сега вече ще работим с последното – **<u>полиномиално!</u>** – тъждество .Ако допуснем

$(P_1,Q_1)\neq 1$ и вземем неразложим („прост") общ делител на P_1 и Q_1, то този делител съгласно $A_1.P_1+B_1.Q_1=G^c$ трябва да дели и G, което е невъзможно поради $(P_1,G)=1$, за което знаем, че е в сила (виж началото на случай 3.)).

Вече сме готови да анализираме по-подробно равенството $R\circ\rho=\dfrac{a_0F^p+\cdots+a_kF^{p-k}G^k}{G^p}.\dfrac{G^q}{b_0F^q+\cdots+a_lF^{q-l}G^l}=\dfrac{P_1}{G^p}.\dfrac{G^q}{Q_1}=\dfrac{P_1}{P_2}.\dfrac{Q_2}{Q_1}$. Ясно е , че това **не** е несъкратимата форма на $R\circ\rho$ която ни е нужна за пресмятането на $\delta(R\circ\rho)$, но сега вече сме близо до целта. Ще използваме и формулите) от случай 3. и пак ще се наложи да **разглеждаме случаи** . Ще да използвам, обаче, „равноправието" между P и Q, за да намаля донякъде броя на разглежданите случаи.

Освен това за опростяване на разсъжденията помага следното „наблюдение":

Нека $Z=\dfrac{T_1}{T_2}=\dfrac{X_1}{X_2}$ са две „форми" на една и съща рационална функция Z. Ако искаме да пресметнем $\rho(Z)$, желателно е да можем да определим чия степен (в смисъл $\deg$) е по-висока – на числителя и ли на знаменателя на Z. Очевидно $\deg(T_1)-\deg(T_2)=\deg(X_1)-\deg(X_2)$. Така че за целта може да се използва **коя да е** „форма" на Z. Това тривиално „наблюдение" може да ни помогне поне малко да посъкратим или поне да организираме по-прозрачно плетеницата от случаи и подслучаи, които ни предстои да разглеждаме. Идеята е, че „съкратимата" форма $R\circ\rho=\dfrac{P_1}{G^p}.\dfrac{G^q}{Q_1}=\dfrac{P_1}{P_2}.\dfrac{Q_2}{Q_1}$ на интересуващата ни рационална функция $R\circ\rho$ може да се окаже по-удобна за разглеждане от несъкратимата (напомням – целта е да видим кое е по-голямо - $\deg$ (числител) или $\deg$ (знаменател)).

И така, ще разгледаме следните подслучаи:

4.1. $f>g$

Прилагайки разсъжденията от 3.1 и към P, и към Q получаваме $\deg(P_1)=p.f$ и $\deg(Q_1)=q.f$. Сега само трябва да се погрижим за **единствените възможни** (виж малко по-горе) съкращения в $R\circ\rho=\dfrac{P_1}{G^p}.\dfrac{G^q}{Q_1}$, а именно между G^p и G^q .Но сега пък трябва да разглеждаме **подслучаи** в зависимост от P и Q. А именно:

4.1.1. $p\geq q$

Тук получаваме, че в знаменателя след съкращение на G^q остава G^{p-q}: $R\circ\rho=\dfrac{P_1}{G^{p-q}}.\dfrac{1}{Q_1}$, което вече е **несъкратимата** му форма (виж малко по-горе Безу и др.т.)! Окончателно $\deg(P_1)=p.f$ и

$\deg(Q_1.G^{p-q})=q.f+(p-q).g\leq q.f+(p-q).f=p.f$ и $\deg(R\circ\rho)=p.f=\delta(R).\delta(\rho)$ (в този случай).

4.1.2. $p<q$

В този случай поради „равноправието между P и Q" правим съвсем аналогични пресмятания и накрая получаваме $\deg(R\circ\rho)=q.f=\delta(R).\delta(\rho)$. Така случай 4.1. е изчерпан.

4.2. $f=g:=h$

Тук се разглеждат подслучаи, базирани на принцип, различен от този в 4.1..За сравнение виж 3.2.1 и 3.2.2.

4.2. 1. $P(\frac{F_0}{G_0}) \neq 0$ и $Q(\frac{F_0}{G_0}) \neq 0$.

Тогава $\deg(P_1) = p.h$ и $\deg(Q_1) = q.h$.Сега, ако $p \geq q$, лесно се вижда , че $\deg$ (числител) $= \deg$ (знаменател) $= p.h = \deg(R \circ \rho) = \delta(R).\delta(\rho)$. Ако пък $p \leq q$, в предното равенство трябва $p.h$ да се замести с $q.h$.

4.2.2. $P(\frac{F_0}{G_0}) = 0$ или(изключващо!) $Q(\frac{F_0}{G_0}) = 0$. Да разгледаме първо (под)случая $P(\frac{F_0}{G_0}) = 0$ (и, следователно $Q(\frac{F_0}{G_0}) \neq 0$).

Доказва се, че при $p \geq q$
$\delta(R \circ \rho) = (p-q).h + q.h = p.h = \delta(R).\delta(\rho)$. При $p \leq q$ пък се доказва $\delta(R \circ \rho) = q.h = \delta(R).\delta(\rho)$

Другият възможен подслучай е $P(\frac{F_0}{G_0}) \neq 0$ (и, следователно $Q(\frac{F_0}{G_0}) = 0$).

Сега, като използваме „равноправието” между P и Q, правим разсъждение, аналогично на горното, в което обаче ролите на P и Q са разменени.

С това случай 4.2 приключва .

4.3. $f < g$

Тук подслучаите пък са аналогични на 3.3.1 и 3.3.2..

4.3.1. $P(0) \neq 0$ и $Q(0) \neq 0$.

При съкратимата форма на $R \circ \rho$ имаме $\deg(P_1.G^q) = \deg(G^p.Q_1) = g.p + g.q = g(p+q)$. Сега при $p \geq q$ $\delta(R \circ \rho) = p.g = \delta(R).\delta(\rho)$, а при $p < q$ $\delta(R \circ \rho) = q.g = \delta(R).\delta(\rho)$
Остана

4.3.2. $P(0) = 0$ или(изключващо!) $Q(0) = 0$. Разсъжденията тук са един вид „комбинация” на 4.2.2. и 4.3.1. .

С това всички случаи са разгледани и доказателството е приключено.

ON TRANSCENDENTAL EXTENSIONS OF TRANSCENDENCE DEGREE 1

Emil Ivanov

Assistant Professor, VTU "T.Kableshkov",Geo Milev Str. 158, Sofia 1574
BULGARIA

Key words: *transcendence degree , multiplicativity*

Abstract:. *Let* $R = R(u) = \frac{P(u)}{Q(u)}, (P,Q) = 1$ *and* $\rho = \rho(x) = \frac{F(x)}{G(x)}, (F,G) = 1$.
If $\delta(\rho) = \max(\deg F, \deg G)$ *and* $\delta(R) = \max(\deg P, \deg Q)$,
then $\delta(R \circ \rho) = \delta(R).\delta(\rho)$.
.