Mechanics Transport Communications

Academic journal

ISSN 1312-3823

issue 3, 2011

article № 0618

http://www.mtc-aj.com

ПЪЛНОТА НА ФЕНОМЕНОЛОГИЧНАТА ТЕОРИЯ НА РЕОЛОГИЯТА

Юлиян Димитров

juldim@abv.bg

МГУ - София

БЪЛГАРИЯ

Резюме: *При описване на поведението на земния масив за решаване на конкретни инженерни задачи се прилага теория на реологията. Основни модели на феноменологичната теория на реологията са еластичен – модел на Хук, вискозен – модел на Нютон и модел на сухо триене – модел на Сен Венан. Чрез последователно и паралелно свързване на основните елементи се изразяват моделите на Максуел, Фоит и Келвин. По-сложни модели се описват с много елементи като се използва и граничен преход – наричат се спектрални модели.*

В настоящия материал се доказва че системата от модели на феноменологичната теория е достатъчно пълна за описване на моделите в реолагията.

В материала се представя доказателство, че с множеството $R = \{r(u)\}$ *от рационални функции с положителни коефициенти може да се интерполира по Ермит - множеството* R *е навсякъде гъсто в множеството от предавателни функции* G .

Ключови думи: *phenomenological rheology, Hookean substance, Newtonian substance, St. Venant substance, transmission functions*

УВОД

Скалите притежават специфични механични свойства, като се деформират (пълзят) бавно с течение на времето под действието на постоянен товар. Деформирането на скалите във времето има сложна физико – химична природа. Процесът на пълзене на скалите се моделира съгласно теория на феноменологичната реолагия [1]. Прилагат се идеализирани схеми, които в количествено отношение приближават реалните свойства на скалите относно основни техни механични параметри.

Реологичното поведение на скалите се описва като диференциални зависимости (уравнения на състоянието) между напреженията и деформациите, зададени като функции на времето. При линейната реология се използват линейни реологични уравнения за състоянието, представляващи обикновени диференциални уравнения. Конкретния вид на уравнението на състоянието се установява чрез серия от експерименти [2].

Процесът на пълзене на скалите се изучава във връзка със строителството и поддържането на граждански и промишлени обекти. Чрез инженерни мероприятия като крепене, заздравяване и фундиране на скалния и земен масив се осигурява стабилното съществуване на съответното съоражение. Във всички тези случаи определящо е свойството пълзене във времето на скалите и почвите. Въпреки напрупания голям опит в строителството, все още има сериозни проблеми в точността на определяне на реологичното поведение на скалите и почвите. Като резултат е прилагането на презапасяване при инженерната строителна дейност. При такива изчислителни схеми на оразмеряване се допуска оскъпяване на строителството и значителен риск от нежелани повреди по време на експлоатацията на построените обекти.

Крепенето на подземни съоражения с пряк изход на повърхността, каквито са и тунелите, се осъществява в усложнени геомеханични условия. Определянето на параметрите на крепежа зависи от точността на приложения реологичен модел на скалния масив [3].

В наследствената теория на реолагията процесът на пълзене на скалите се разглежда като последователност от състояния на еластичния скален масив, при променящи се във времето по определен начин еластични константи [4].

ДВУКОМПОНЕНТНИ РЕОЛОГИЧНИ МОДЕЛИ

Съгласно [5] чрез комбиниране на трите основни модела (модел на Хук, модел на Нютон и модел на Сен Венан) се получава таблица на двукомпонентните реологични модели (Таб.1). Основните модели, се изразяват съответно с пружина, демпфер и плъзгач. При моделите от Таб. 1, които всключват елемент на Сен Венан, съответното уравнение на състоянието съдържа делта функция $\delta(t)$. В Таб. 1 са дадени и съответните предавателни функции

Съединяването успоредно или последователно на елементите води до получаване на схемите на таблицата извън главния диагонал. Всеки от моделите има два параметъра: $\sigma(t)$ - девиатор на напреженията и $\varepsilon(t)$ - девиатор на деформациите.

Таблица 1. Двукомпонентни реологични модели и техните съответни свойства: на деформациите; на напреженията; уравнение на състоянието и предавателна функция.

	Еластично	Вискозно	Пластично
Еластично	Еластичен  Пружина Модел на Хук σ_e, ε_e $\sigma_e = b_0\varepsilon_e$ $w^\sigma = b_0$	Еластично - вискозен  Модел на Максуел $\sigma = \sigma_e = \sigma_N$ $\varepsilon = \varepsilon_e + \varepsilon_N$ $a_0\sigma + a_1\sigma' = \varepsilon'$ $w^\sigma = \frac{s}{a_0 + a_1 s}$	Еластично - пластичен  $\sigma = \sigma_e = \sigma_S = \sigma_0$ $\varepsilon = \varepsilon_e + \varepsilon_S$ $a_0\sigma + \delta(\sigma - \sigma_0) = \varepsilon$ $w^\sigma = a_0 + e^{-\sigma_0 s}$
Вискозно	Вискозно - елестичен  Модел на Келвин $\sigma = \sigma_e + \sigma_N$ $\varepsilon = \varepsilon_e = \varepsilon_N$ $\sigma = b_0\varepsilon + b_1\varepsilon'$ $w^\sigma = b_0 + b_1 s$	Вискозен  Демпфер Модел на Нютон σ_N, ε_N $\sigma_N = b_1\varepsilon'_N$ $w^\sigma = b_1 s$	Вискозно - пластичен  $\sigma = \sigma_N = \sigma_S = \sigma_0$ $\varepsilon = \varepsilon_N + \varepsilon_S$ $\sigma + b_1\delta'(\sigma - \sigma_0) = \varepsilon'$ $w^\sigma = \frac{b_1 s}{1 + b_1 s e^{-\sigma_0 s}}$
Пластично	Пластично - еластичен  $\sigma = \sigma_e + \sigma_S$ $\varepsilon = \varepsilon_e = \varepsilon_S$ $a_0\sigma + \delta(\sigma + \sigma_0) = \varepsilon$ $w^\sigma = \frac{1}{a_0 + e^{\sigma_0 s}}$	Пластично - вискозен  $\sigma = \sigma_N + \sigma_S$ $\varepsilon = \varepsilon_N = \varepsilon_S$ $a_1\sigma' + \delta(\sigma + \sigma_0) = \varepsilon$ $w^\sigma = \frac{1}{a_1 s + e^{\sigma_0 s}}$	Пластичен  Плъзгач Модел на Сен Венан σ_S, ε_S $\varepsilon_S = \delta(\sigma_S - \sigma_0)$ $w^\varepsilon = e^{-\sigma_0 s}$

ПРЕДСТАВЯНЕ НА СКАЛНИЯ И ЗЕМЕН МАСИВ ЧРЕЗ РЕОЛОГИЧНИ МОДЕЛИ

Реалните почви имат сложни реологични модели. Дори в случая, когато са хомогенни, те не могат да се представят с достатъчна точност чрез двукомпонентни модели. Разглеждаме сложни модели, съдържащи само елементги на Хук и на Нютон. Съгласно [6] примери на такива модели са:

1. Спектрален модел на Фойт - състои се от последователно свързани един елемент на Максуел и n елемента на Фойт.
2. Спектрален модел на Максуел - състои се от паралелно свързани елемент на Хук, елемент на Нютон и n елемента на Максуел.
3. Стълбов модел на вискозно еластично тяло.

Схемата се състои от рекурсивно свързани елементи на Фойт.

Аналитично моделът с повече елементи (сложен модел) се описва с уравнение на състоянието, което е обикновено диференциално уравнение с участието на производни от по-висок ред. Общият вид на уравнението на състоянието е

(1) $\sum_{i=0}^{n} a_i \sigma^{(i)} = \sum_{i=0}^{m} b_i \varepsilon^{(i)}$, където $a_i \geq 0$ и $b_i \geq 0$, σ - девиатор на напреженията; ε - девиатор на деформациите.

УРАВНЕНИЕ НА СЪСТОЯНИЕТО НА СЛОЖЕН РЕОЛОГИЧЕН МОДЕЛ

Има пълно съответствие между феноменологичните модели на реологията и елементите на системите за автоматично регулиране, описани чрез обикновени диференциални уравнения с постоянни коефициенти. Без допълнително усложнение предполагаме, че моделите, които разглеждаме, съдържат само елементи на Хук и елементи на Нютон. В този случай, при моделирането се използват аналитични функции. Добавянето на модели с елемент на Сен-Венан води до необходимост от използване в уравнението на състоянието на обобщени функции, като делта функция $\delta(t)$.

Да означим лявата и дясна част на уравнение (1) с $f(\sigma)$ и $h(\sigma)$. Прилагаме лапласова трансформация към двете страни на уравнението. Свойствата на лапласовата трансформация са дадени в [7]. Нека при лапласовата трансформация образът на функцията $f(x)$ е $\bar{f}(s) = L(f(x))$. Нека $L(\sigma) = \bar{\sigma}$ и $L(\varepsilon) = \bar{\varepsilon}$. В резултат на прилагане на трансформацията се получава $\bar{f}(s)L(\sigma) = \bar{h}(s)L(\varepsilon)$. Тогава $\bar{\sigma} = \frac{\bar{h}(s)}{\bar{f}(s)}\bar{\varepsilon}$. Означаваме $w^{\sigma} = \frac{\bar{h}(s)}{\bar{f}(s)}$ - предавателна функция (предавателната функция при изразяване на σ).

Феноменологичните модели на реологията се получават от основните чрез събиране на напрежения и събиране на деформации. От това следва, че тредавателната функция е рационална функция и че коефициентите на предавателната функция са положителни.

В общия случай на модел на линейната реология лапласовата трансформация на уравнението на състоянието е $\bar{\sigma}(s) = g(s)\bar{\varepsilon}(s)$, където предавателната фунция $g(s)$ е аналитична функция, която за положителни стойности на s приема положителни стойности. Означаваме с $G = \{g(s)\}$ множеството на предавателните функции.

ПЪЛНОТА НА СИСТЕМАТА ОТ МОДЕЛИ НА ЛИНЕЙНАТА РЕОЛОГИЯ

Нека $R = \{r(x)\}$ е множеството от рационалните функции с положителни коефициенти. Ще покажем, че множеството R е навсякъде гъсто в множеството от предавателни функции G. Достатъчно е да докажем, теоремата за интерполиране по Ермит с функции от R.

<u>Теорема</u>: Нека $C_1, C_2, \ldots, C_n$ са n различни положителни числа и е дадена матрицата $\{a_i^j\}_{i=1 \div n,\, j=0 \div k}$ с положителен първи ред ($a_i^0 > 0$ за $i = 1 \div n$). Тогава съществува $r \in R$, така че

(2) $\left| r^{(s)}(C_i) = a_i^s \right.$ за $i = 1 \div n, s = 0 \div k$.

Системата от равенства (2) е условието за интерполиране по Ермит.

<u>Правило</u> за увеличаване на коефициентите на полином:

Нека $\{C_i\}_{i=1\div n+1}$ са различни положителни числа и е даден полинома $f_1(x) = \sum_{i=0}^{q} b_i' x^i$, където $q = (k+1)n + \nu - 1 \geq 0$, $b_i' > 0$ за $i = 0 \div q$.

Нека $t > q$ е цяло положително число. Тогава съществуват функциите $\{\Phi_i(t)\}_{i=0\div q}$, такива че за всяко $\varepsilon > 0$ удовлетворяващо неравенствата $\left| \Phi_i(t) < \varepsilon b_i' \right.$ за $i = 0 \div q$ съществуват числата $\{b_i''\}_{i=0\div q}$, $b_i'' > 0$ и такива, че за полинома $f_2(x) = \sum_{i=0}^{q} b_i'' x^i + \varepsilon x^t$ е изпълнено

(3) $\left| f_2^{(s)}(C_i) = f_1^{(s)}(C_i) \right._{\substack{i=1\div n,\, s=0\div k \\ i=n+1,\, s=0\div(\nu-1)}}$.

<u>Доказателство</u> на правилото:

Въвеждаме означението за диференциране $D^s(x) = \dfrac{\partial^s x}{\partial x^s}$. Разглеждаме линейната система с неизвестни $\{\Delta b_r\}_{r=0\div q}$: $\left| \sum_{r=0}^{q} D^s(C_i^r)\Delta b_r = \varepsilon D^s(C_i^t) \right._{\substack{i=1\div n,\, s=0\div k \\ i=n+1,\, s=0\div(\nu-1)}}$.

Системата е с единствено решение, което се получава по формулите на Крамер: $\left| \Delta b_s = \Phi_s(t)\varepsilon \right._{s=0\div q}$, където

(4) $\left| \Phi_s(t) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{l=0}^{k} \beta_{i,l}^s D^l(C_i^t) + \sum_{l=0}^{\nu-1} \beta_{n+1,l}^s D^l(C_{n+1}^t) \right._{s=0\div q}$

Коефициентите $\beta_{i,l}^s$ не зависят от t и ε. Означаваме $b_s'' = b_s' - \Delta b_s$, където $s = 0 \div q$.

Нека $\varepsilon > 0$ е избрано достатъчно малко, такова че $\left| \Phi_s(t)\varepsilon < b_s' \right.$ за $s = 0 \div q$. Тогава числата $\{b_s''\}_{s=0\div q}$ са положителни. Следователно $f_2(x) = \sum_{s=0}^{q} b_s'' x^q + \varepsilon x^t$ удовлетворява условието на правилото.

<u>Лема 1</u>:

Нека $q = (k+1)n + \nu - 1 \geq 0$ и $0 < C_1 < \cdots < C_{n+1}$. Нека $f_1(x)$ е полином, първите $q+1$ коефициента на който са положи телни. Означаваме с Λ_{f_1} множеството от полиномите $f \in R$ с първи $q+2$ положителни коефициента, които удовлетворяват системата

$\left| f^{(s)}(C_i) = f_1^{(s)}(C_i) \right._{\substack{i=1\div n,\, s=0\div k \\ i=n+1,\, s=0\div(\nu-1)}}$.

Тогава:

1. $\Lambda_{f_1} \neq \varnothing$
2. Функционалът $\theta(f) = f^{\nu}(C_{n+1})$ не е ограничен от горе в Λ_{f_1}.

<u>Доказателство</u> на лема 1:

Свойство 1:

Нека $f_1(x) = \sum_{s=0}^{q} b_s' x^s$. Прилагаме правилото за увеличаване на коефициентите на полином и получаваме полинома $f_2 \in \Lambda_{f_1}$.

Свойство 2:

Нека $t > q$ и разглеждаме $f_t(x) = \sum_{s=0}^{q+1} b''_s x^s + \sum_{s=q+2}^{\mu} b'_s x^s + b''_t x^t \in \Lambda_{f_1}$.

Избираме $\varepsilon = b''_t$, така че в поне едно неравенство от системата $\left|\Phi_s(t)\varepsilon \le b''_s\right._{s=0\div q}$ да се достигне равенство. Оставяме t да расте неограничено и избираме подредицата $\{t_\lambda\} \to \infty$, такава, че да е изпълнено едно и също равенство на системата $\Phi_{s_0}(t)\varepsilon = b''_{s_0}$. Съответната редица от функции е $\{f_\lambda\}$. Във всеки член на редицата $\{\theta(f_\lambda)\} = \{f_\lambda{}^{\nu}(C_{n+1})\}$ разглеждаме събираемото $b''_{t_\lambda} D^{\nu}\left(C_{n+1}^{t_\lambda}\right) = \frac{D^{\nu}\left(C_{n+1}^{t_\lambda}\right)}{\Phi_0(t_\lambda)} \cdot \Phi_0(t_\lambda) b''_{t_\lambda} = \frac{D^{\nu}\left(C_{n+1}^{t_\lambda}\right)}{\Phi_0(t_\lambda)} b''_{s_0}$. Израза $\frac{\Phi_0(t_\lambda)}{D^{\nu}\left(C_{n+1}^{t_\lambda}\right)}$ е представен като сума от две събираеми съгласно (4). В първото събираемо $\frac{D^{l}\left(C_{i}^{t_\lambda}\right)}{D^{\nu}\left(C_{n+1}^{t_\lambda}\right)} \to 0$ поради $C_i < C_{n+1}$. Второто събираемо е рационална функция на t_λ с числител от степен $l < \nu$ - степента на знаменателя. $\Rightarrow$ второто събираемо също клони към нула. $\Rightarrow$ избраното събираемо расте неограничено и понеже $f_\lambda^{\nu}(C_{m+1})$ е сума от положителни събираеми то редицата $\{f_\lambda^{\nu}(C_{m+1})\} \to +\infty$.

Лема 2:

Нека са дадени $m+1$ различни положителни числа (таблица от числа) $\{a_i^j\}_{i=n+1,\, j=0\div\nu}^{i=1\div n,\, j=0\div k}$, от които $a_i^0 > 0$ за $i = 0 \div n$. Нека $q = (k+1)n + \nu - 1 \ge 0$. Условието за интерполация се записва като система от равенства

(5) $\left|r^{(s)}(C_i) = a_i^s\right._{i=n+1,s=0\div l}^{i=1\div n,s=0\div k}$, където $r(x) = \frac{h(x)}{f(x)} \in R$ - h и f са полиноми.

Нека $r_1 = \frac{h_1}{f_1} \in R$ удовлетворява (5) и h_1, f_1 са с $q+1$ първи положителни коефициенти и $l = \nu - 1$. Тогава съществува $r_2 = \frac{h_2}{f_2} \in R$, която удовлетворява (5) и h_2, f_2 са с $q+2$ първи положителни коефициенти и $l = \nu$.

Свеждане към уравнения с полиноми:

От $h(x) = r(x)f(x)$ и след прилагане на формулата на Лайбниц за диференциране се получава "еквивалентно условие за интерполация":

$r = \frac{h}{f}$ удовлетворява (4) точно когато полиномите h и f удовлетворяват

(6) $h^s(C_i) = \sum_{j=0}^{E} \binom{s}{j} a_i^{s-j} f^{(s)}(C_i)$.

Доказателство на лема 2:

Нека $r_1 = \frac{h_1}{f_1}$ удовлетворява условията на лема 2, където h_1 и f_1 удовлетворяват (5). При условия на лема 1 можем да определим множествата $\Lambda_{h_1} \ne \varnothing$ и $\Lambda_{f_1} \ne \varnothing$. В еквивалентното условие (5) разглеждаме улавнението при $i = n+1$ и $s = \nu$ и изразяваме a_{n+1}^{ν}. Дясната част на полученото равенство означаваме с $F(h, f)$. Поради доказаната с лема 1 неограниченост на функционала $\theta(f)$ в Λ_{h_1} и Λ_{f_1}, то можем да изберем h' и f_0, така че $F(h', f_0) < a_{n+1}^{\nu}$ и h'', така че $F(h'', f_0) > a_{n+1}^{\nu}$. Тогава $h = ph' + qh'' \in \Lambda_{h_1}$ за $p \geq 0$, $q \geq 0$ и $p + q = 1$. $\Rightarrow$ съществува h_0, такова че $F(h_0, f_0) = a_{n+1}^{\nu}$. С това лема 2 е доказана.

Като се приложат формулираните леми теоремата за интерполиране по Ермит се доказва чрез математическа индукция по n, k и ν.

ИЗВОДИ

В настоящия материал се доказва пълнотата на моделите на феноменологичната теория в линейната реология. За целта в материала се представя доказателството, че с множеството $R = \{r(u)\}$ от рационални функции с положителни коефициенти може да се интерполира по Ермит – доказва се, че множеството R е навсякъде гъсто в множеството от предавателни функции G.

Следователно феноменологичната теория на реологията съдържа пълна система от модели, с които може да се представят елементите на линейната реология.

ЛИТЕРАТУРА:

[1] Парашкевов Р., Механика на скалите, Техника, 1969.
[2] Ержанов Ж. С., Теория ползучести горных пород и ее приложения, Наука, Алма-ата, 1964.
[3] Димитров Ю. Изследване реологичното поведение на масива около изработки с пряк изход на повърхността, Конференция с международно участие "Открит и подводен добив", Варна, 2009.
[4] Амусин Б., А. М. Линьков, Об использовании переменных моделей для решения одного класа задач линейного наследственной ползучести, Сб. ВНИМИ, №88, 1973.
[5] Hudson J. A., J. Harison, Engineering Rock Mechanics. An Introduction to the Principles, Pergamon, 1997.
[6] Гольдштейн М. Н., Механические свойства грунтов, Изтельство Литературы по строительству, Москва, 1971.
[7] Ивонов В. А., Медведев В. С. И др., Математические основы теории автоматического регулирования, т. I, II, Москва, 1977.

COMPLETENESS OF THEORY OF PHENOMENOLOGICAL RHEOLOGY

Julian Dimitrov

UMG – "St. Ivan Rilski"
BULGARIA

Keywords: *phenomenological rheology, Hookean substance, Newtonian substance, St. Venant substance, transmission functions*

Abstract: *In describing the behavior of rock mass to solve specific engineering problems, apply theory of rheology. Basic models of the phenomenological theory of rheology are elastic - Hook model, viscous - Newton's model and of dry friction model - a model of Saint Venant. By series and parallel connection of the main elements consist of models of Maxwell, Kelvin and Foit. More complicated models are described by many elements and using border crossing - is called spectral models.*
In this paper proves that the system of the phenomenological theory is sufficiently complete to describe the models in the rheology.
In the material presented evidence that the set of rational functions with positive coefficients can be interpolated in Ermita – the set is everywhere dense in the set of transmission functions.