

## ЕДНО РЕШЕНИЕ ЗА ГРЕДА ВЪРХУ НЕЦЕНТРИЧНИ ОПОРИ С ПРОМЕНЛИВА КОРАВИНА

**Албена Дойчева**  
[doicheva\\_fhe@uacg.bg](mailto:doicheva_fhe@uacg.bg)

*Гл. Асистент, УАСГ-София, бул. "Хр. Смирненски" №1, София 1046*  
**БЪЛГАРИЯ**

**Резюме:** Анализът на напрегнатото и деформираното състояние на конструктивни елементи най-често се основава на предпоставката за центричното им свързване за съвместно предаване на усилия и центричното разполагане на опорните устройства. На практика обаче изобилстват примери за нецентрично свързване и нецентрично подпиране, например при подкранови греди, за постигане на еднакво ниво по горните ръбове на греди с различни напречни сечения в пространствени рамки под силози, за изравняване на ръбовете на греди и колони по фасадите на сгради, мостови греди и др. Точното моделиране на реагирането на телата от гредови тип при това положение както от гледна точка на напрегнато и деформирано състояние, така и при анализ на възможностите за загуба на равнинна или пространствена (огъвателно-усуквателна) устойчивост води до интересни заключения, заслужаващи вниманието както на научните работници в областта на механиката, така и на специалистите от практиката.

В настоящата работа се разглежда призматична греда в условията на специално огъване, еластичен материал и хипотеза на Бернули-Ойлер. Разположена е върху две нецентрични опори, снабдени с ротационни в равнината на натоварване и хоризонтални линейни пружини с променящи се по линейен закон пружинни константи, зададени като функции на собствените коравини на гредата, съответно на огъване и центричен опън (натиск). Гредата е натоварена със съсредоточен напречен товар в средното сечение. Опорите са разположени под оста на гредата, което води до появата на значителни осови и то натискови сили. Приблизителни решения по теория от първи ред, представени в публикации с участието на автора, показаха, че големината на нормалната сила от вертикален товар зависи силно от приноса в израза за потенциалната енергия на линейната деформация в оста, породена от нормалната сила. При това положение възниква въпросът за големината и изменението на хоризонталната реакция и нормалната сила при вариране на пружинните константи както и за характера на напрегнатото състояние на гредата. Специално внимание е отделено на граничния случай на пълно двустранно запъване относно коравината на запъващата част. Решенията са основани на точното диференциално уравнение на еластичната линия и теоремата за еластичната аналогия.

**Ключови думи:** Греда, Нецентрични еластични опори, Големи премествания;

### 1. УВОД

Анализът на напрегнатото и деформирано състояние на греди и системи от тела се извършва обикновено при предпоставката за тяхното центрично свързване и лагеруване.

Съществуват множество примери обаче, в които те са нецентрични. Създаването на адекватен изчислителен модел за отчитане на ефекта и от еластомерни лагери е предмет на предишни изследвания с участието на автора [1], [2]. В тях са представени напрегнати и деформирани състояния, които се различават съществено от онези при традиционното моделиране. В настоящата работа се предлага едно аналогично изследване. Разглежда се греда,



Фиг. 1

Фиг. 2



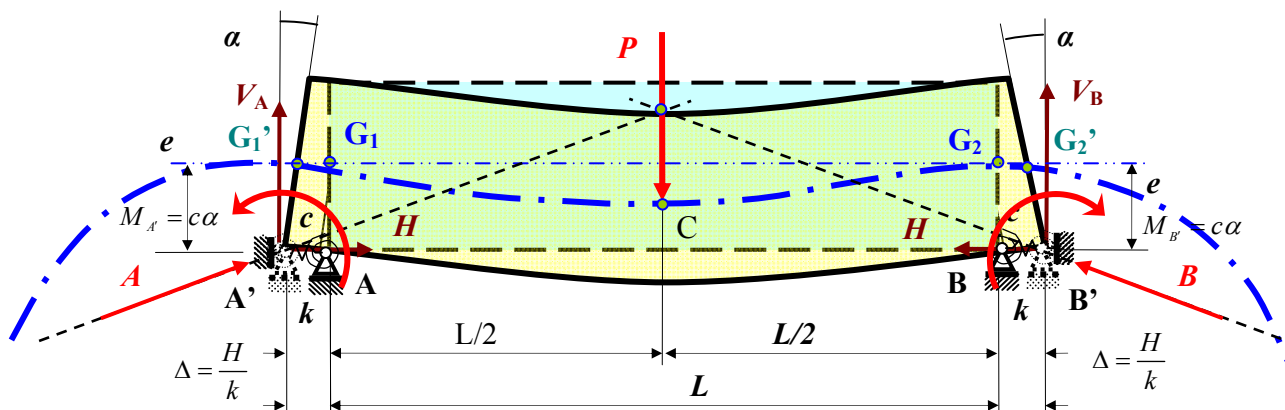
деформирана ос и теоремата за еластичната аналогия [2].

подпряна нецентрично на опори с линейни и ротационни пружини. Случай, често срещан в практиката, особено при използването на еластомерни лагери, подкранови греди, свързването на главни с второстепенни греди и др.

Напрегнатото и деформираното състояние на гредата се изследва чрез точното диференциално уравнение на нейната

## 2. ПОСТАНОВКА НА ЗАДАЧАТА

Разглеждаме права греда с дължина  $L$  и постоянно напречно сечение с лице  $A$ , инерционен момент  $I$  от еластичен материал с модул на линейна деформация  $E$ . Гредата е подпряна нецентрично със ставни пружинни опори (фиг. 3) в точки  $A$  и  $B$ . Коефициентът  $c$  на ротационните пружини е свързан с коравината на огъване  $EI$  на гредата чрез множителя  $\gamma$  като  $c = \gamma EI/L$ , а  $k$  за линейните пружини е обвързан с коравината на гредата на опън/натиск  $EA$  чрез множителя  $\zeta$ , както следва:  $k = \zeta EA/L$ . Опорите в  $A$  и  $B$  са отместени от оста на разстояние  $e$ , а натоварването се състои от сила  $P$  в средното сечение. Тя предизвиква равни по големина опорни реакции (фиг. 3).



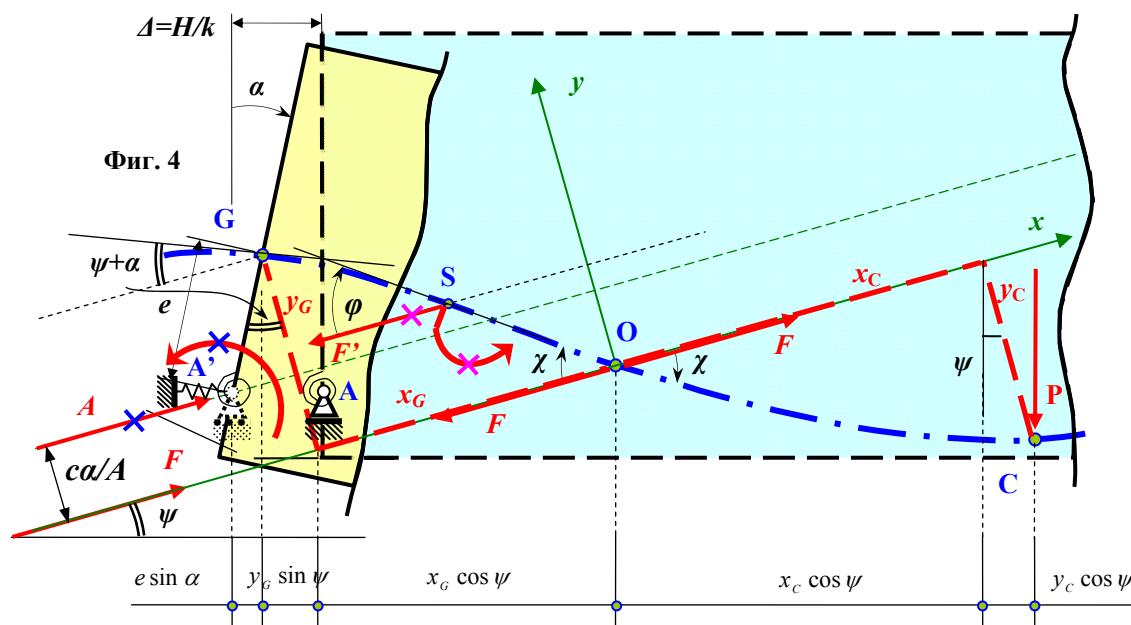
Фиг. 3 Еластична линия на нецентрично подпряна греда натоварена със сила в средата

Огъването на гредата и стремежът на долния ръб за деформиране, води до преместване на опорите. То е съпроводено от скъсяване на линейните пружини с  $\Delta = H/k$ . От друга страна, завъртането на крайните сечения на ъгъл  $\alpha$  предизвиква момент в ротационните пружини  $M = c\alpha$ . Отчитането му става с отместване на силата  $\vec{A}$  от опората  $A'$  на разстояние  $c\alpha/|\vec{A}|$ , аналогично и за реакцията  $\vec{B}$  от  $B'$  (фиг.4).

Ако разгледаме част от гредата (фиг. 4), примерно  $GS$ , вътрешните сили ще се редуцират на сила  $\vec{F}'$  и момент за точка  $S$  от оста, като  $\vec{F}'$  е по необходимост елемент на двоица с  $\vec{A}$ . Редукцията на група сили в равнина учи, че силата  $\vec{F}'$  и моментът  $M_s$ , се свеждат до равнодействащата  $\vec{F}$ , чиято директриса пресича оста на деформираната греда в точка  $O$  от оста, характеризираща се с нулева кривина, респективно нулев огъващ

момент. Приемаме че силата  $\vec{F}$  сключва с хоризонта ъгъл  $\psi$ . Насочваме по нея локална ос  $x$  и въвеждаме начален ъгъл  $\chi$  към тангентата през точка  $O$ . Посоката на ъгъла  $\chi$  определя и ориентацията на другата локална ос  $y$ . Разглеждайки дясно сечение за т.О ще имаме аналогично разрезно усилие – силата  $\vec{F}$ .

Задачата е симетрична. Ето защо ще се ограничим с разглеждане на едната половина на гредата. Разрешаващите уравнения са на статиката и геометрията, както следва:



Фиг. 4

Уравненията на статиката и на геометрията са [2]:

$$(1) \quad \Lambda^2 \sin \psi - \frac{1}{2} \Lambda_p^2 = 0, \text{ където } \Lambda_p = \frac{PL^2}{EI}.$$

$$(2) \quad \Omega [2K(p^2) - F(p^2, z_c) - F(p^2, z_g)] + \frac{\Lambda^2 \Omega}{\lambda^2} \{ \Psi [\Pi(n; p^2, z_c) + \Pi(n; p^2, z_g) - 2\Pi(n, p^2)] + (1 + \Psi) [2K(p^2) - F(p^2, z_c) - F(p^2, z_g)] \} - \frac{\Lambda}{2} = 0.$$

$$(3) \quad \frac{2}{\Lambda} \sqrt{\frac{1+\varepsilon}{\varepsilon}} \arctg \left( q \sqrt{\frac{\varepsilon}{1+q^2\varepsilon}} \cos z_g \right) - \beta \cos(\psi + \alpha) - \gamma \frac{\alpha}{\Lambda^2} = 0$$

$$(4) \quad \beta \sin \alpha + \frac{\Omega}{\Lambda} \{ \Psi [\Pi(n; p^2, z_c) + \Pi(n; p^2, z_g) - 2\Pi(n, p^2)] + (1 + \Psi) [2K(p^2) - F(p^2, z_c) - F(p^2, z_g)] \} \cos \psi + \frac{2}{\Lambda} \sqrt{\frac{1+\varepsilon}{\varepsilon}} \left[ \arctg \left( q \sqrt{\frac{\varepsilon}{1+q^2\varepsilon}} \cos z_g \right) + \arctg \left( q \sqrt{\frac{\varepsilon}{1+q^2\varepsilon}} \cos z_c \right) \right] \sin \psi - \frac{1}{2} \frac{\Lambda^2}{\zeta \lambda^2} \cos \psi = 0.$$

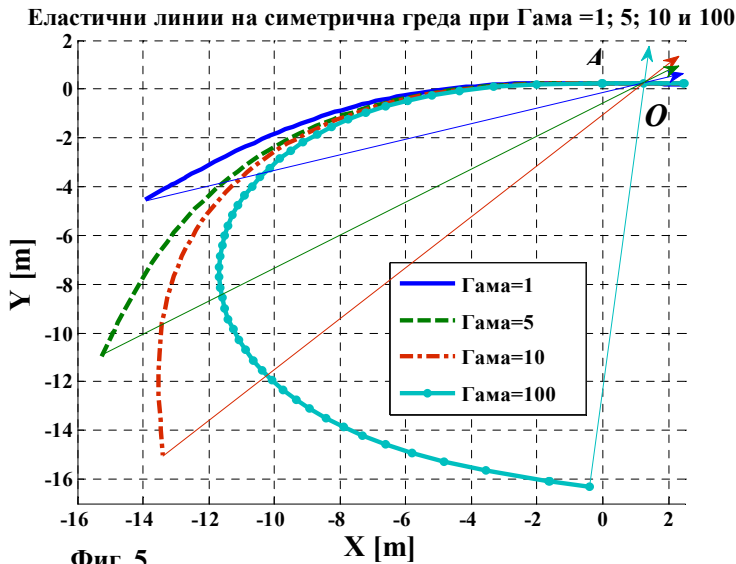
Тук  $K(p^2)$  и  $F(p^2, z)$  са съответно пълн и непълн елиптичен интеграл от втори род;  $\Pi(n; p^2)$ ,  $\Pi(n; p^2, z)$  са съответно пълн и непълн елиптичен интеграл от трети род [3]. Въведени са и означенията

$$(5) \quad \Lambda^2 = \frac{FL^2}{EI}, \lambda^2 = \frac{L^2}{i^2}, i^2 = \frac{I}{A}, p^2 = q^2 \frac{1+\varepsilon+q^2\varepsilon}{1+2q^2\varepsilon}, q = \sin \frac{\chi}{2}, \Psi = \frac{2(1+q^2\varepsilon)}{\varepsilon}, \Omega = \sqrt{\frac{1+\varepsilon}{1+2q^2\varepsilon}}, n = \frac{q^2\varepsilon}{1+2q^2\varepsilon},$$

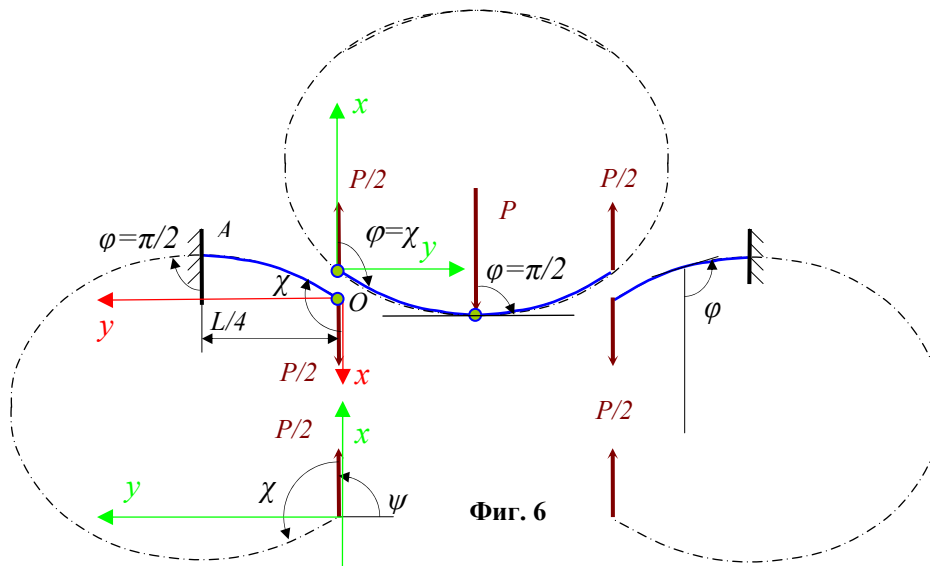
$$z(\varphi) = \arcsin \left( \frac{1}{q} \sqrt{\frac{1+2q^2\varepsilon}{1+q^2\varepsilon+\varepsilon \sin^2 \frac{\varphi}{2}}} \sin \frac{\varphi}{2} \right).$$

### 3. ЧИСЛЕНИ РЕЗУЛТАТИ

Числените решения са проведени с програмния пакет MATLAB.



гредата. Начертани са и съответните локални оси  $x$ , които пресичат оста на гредата в точка  $O$ . Така при  $\gamma=100$ , което се доближава до случая на запъване, оста  $x$  е почти



по  $PL/8$ , колкото предсказва и решението по теория от първи ред. Показани са и някои характерни локални координатни системи заедно с граничните стойности на текущите ъгли в интервала  $\pi/2 \leq \varphi \leq \chi$ . Граничният ъгъл  $\chi$  се определя от очевидното условие  $y_A = y(\varphi = \pi/2) = L/4$  и уравнението [2]

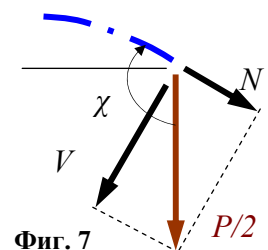
$$(6) \quad \frac{\sqrt{\frac{\varepsilon}{1+q^2\varepsilon}} \sqrt{2q^2 + 2q^4\varepsilon - q^2\varepsilon - 1}}{2+2q^2\varepsilon+\varepsilon} = \operatorname{tg}\left(\frac{\Lambda}{8} \sqrt{\frac{\varepsilon}{1+\varepsilon}}\right).$$

Численото решение за сечение IPE500 при  $L=5\text{m}$ ,  $P=1000\text{kN}$  чрез (1) и (5) ни дава  $\Lambda=0,351416$ ,  $\lambda^2=599,066$ . Тогава  $\varepsilon \approx 0,000206$ , а от (6) определяме  $\chi=1,5747\text{rad}$ .

Наличието на нормално разрезно усилие  $N = P \cos(\pi - \chi)/2 = 1,95\text{kN}$  (фиг. 7) обяснява деформирането на гредата от вертикалната сила и по специално удължението ѝ след деформацията.

При необходимост можем да определим дължината  $\bar{L}$  на деформираната ос и максималното вертикално преместване  $w_{\max}$ .

На фигура 8 е показано как се изменя хоризонталната сила  $H$  за стоманена греда с напречно сечение IPE500, дължина  $L=5\text{m}$ , опряна по долния ръб и натоварена със сила



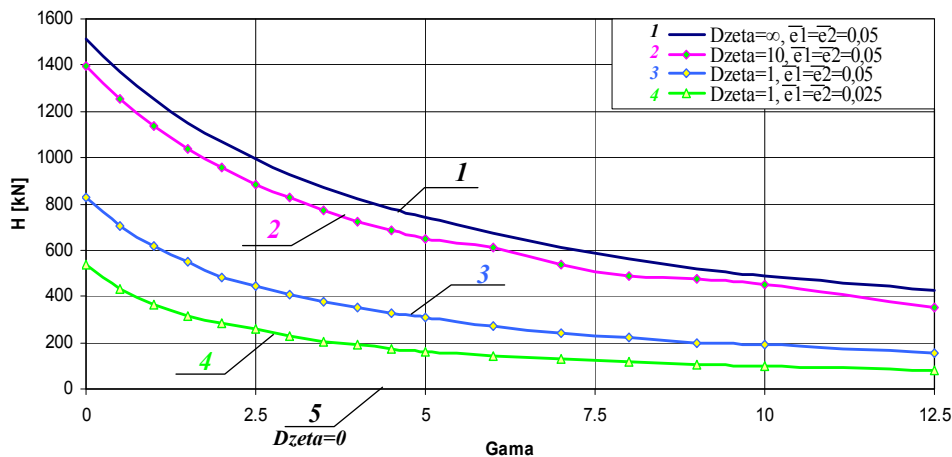
Фигура 5 онаглеждава самия подход за еластичната аналогия и показва еластичната линия след деформация за стоманена греда с напречно сечение IPE500, дължина  $L=5\text{m}$ , опряна в крайните сечения по долния ръб. Представянето е в координатна система  $X-Y$  с начало в опора  $A$ . Отместването над  $Y=0$  съответства на ексцентрицитета  $e$ . Вижда се как нарастването на множителя  $\gamma$  от 0 до 100 се отразява на изменението на една полуълна от кривите, част от които (надясно от  $A$ ) е и оста на

вертикална, т.е. ъгълът  $\psi \Rightarrow \pi/2$ . Граничният случай  $\psi = \pi/2$  е онагледен с фиг. 6. Деформираната ос на гредата се представя с четири еднакви клона с инфлексни точки  $O$  на разстояние  $L/4$  от опорите. Резултантното разрезно усилие тук е  $P/2$ , така че опорният огъващ момент и този в средата са

$P=1000\text{kN}$  в средното сечение, при различни стойности на множителя  $\gamma$  и зададени конкретни отношения на коефициентите на линейните пружини и коравината на опън (натиск) на гредата. Най-общо прави впечатление, че при нарастване на коравината на ротационната пружина, хоризонталната сила намалява. Това се обяснява с малките завъртания на крайните сечения при по-корави ротационни пружини и съответно по-малките осови деформации и съпътстващите премествания на фибрите.

С намаляването на коравината на линейната пружина намалява и хоризонталната реакция. При  $\zeta=1$  има хоризонтална реакция със значителна големина. Кривата 4 показва същия случай, но при по-малки ексцентритети  $e_1=e_2=0,125\text{m}$ , т.е. опорите са приближени до оста на гредата на половината ръбово разстояние. Това показва тенденцията на намаляване на хоризонталната реакция и съответното ѝ нулиране при

**Фиг. 8** Хоризонтална реакция  $H$  в зависимост от коравината на пружините и ексцентритетите

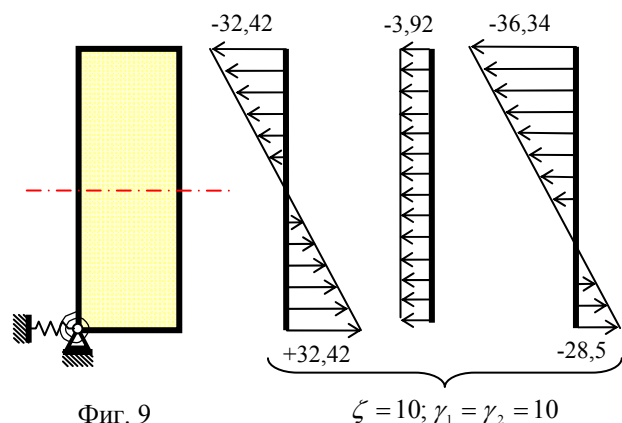


осово подпиране.

В подкрепа на изводите при запъната греда, привеждаме числения резултат, подплатен със стойности от фиг.8. Прави впечатление, че интервалът на изменение на  $H$  след  $\zeta=10$  (кривите 1 и 2) се стеснява

значително, докато криви 3 и 5 се отдалечават. Тогава с основание можем да твърдим, че моделирането на запъната греда може да се извърши с достатъчна точност и с тази стойност на приведената коравина. Още повече, че когато приемаме запъване между конструктивни елементи, чрез статическите схеми ние залагаме, че връзките между тях не търпят преместване и сеченията не се завъртат. Но това не е естественото поведение на еластичен материал. Ето защо ще се спрем на стойности от крива 2, когато и  $\gamma=10$ .

Огъващият момент в характерните сечения е  $M = PL/8 = 62500 \text{ kN.cm}$ , а нормалното напрежение от огъването на гредата  $\sigma_{огъв} = M/W = 32,42 \text{ kN/cm}^2$ . Същевременно  $N = 452,83 \text{ kN}$  и води до корекция в напреженията със  $\sigma_{нат.} = N/A = 3,92 \text{ kN/cm}^2$ , което е 12,1% промяна в стойността за  $\sigma$ . Резултатът показва, че промяната в подпирането в посока на запъване води до съществено изменение на напреженията, сравнени с тези само от огъване.



Фиг. 9

Заслужава да се отбележи, че изразите (6) за  $\chi$ , и подобни за  $\bar{L}$  и  $w_{\max}$  в частния случай са валидни и за греда със запъване в единия край и  $N$ -апарат в другия при всяко  $P$ , което запазва положението си в процеса на деформацията.

#### 4. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Извършено е точно решение на нецентрично подпряна призматична греда на еластични опори, натоварена със сила в средата. Получени са уравнения за опорните реакции. Точното решение не само разкрива интересни страни от реагирането на деформируемото тяло, но може да служи и като база за сравняване на приблизителни подходи.

Разгледан е частен случай на двустранно запъване и са направени изводи за възникващото по-особено напрегнато и деформирано състояние. Изведено е трансцендентно уравнение за характерния ъгъл  $\chi$  на деформираната ос на гредата.

Числено е показана чувствителността на нарастване на напреженията в резултат на ограничаване на преместванията на гредата.

#### ЛИТЕРАТУРА

[1] Дойчева А. и К. Младенов, Една задача за нецентрично подпряна греда с еластична връзка, Трети симпозиум по мостове „Проектиране и изграждане на мостове”, УАСГ, София, 29.05.2009; Списание „Строителство”, 4, 2009 г. стр.11-16

[2] Младенов, К., А. Дойчева - Едно изследване на нецентрично подпрени греди при големи премествания. Списание “Строителство” брой 1 от 2011г. стр.10-22

[3] Абрамовиц, М. и И. Стиган, Справочник по специальным функциям с формулами, графиками и математическими таблицами, Наука, Москва, 1979, стр. 830;

#### Благодарност:

Разработката е по тема, финансирана от Център за научни изследвания и проектиране при УАСГ – София, Договор №120/11.

## A SOLUTION FOR A BEAM ON OFF-CENTER SUPPORTS OF VARYING STIFFNESS

**Albena Doicheva**

*Assistant Prof. UACEG Sofia 1046, Hr.Smirenski Blvd 1*  
**BULGARIA**

**Keywords:** *Bernoulli-Euler beam, off-center spring supports, large deformations*

**Abstract:** *The stressed and strained state analysis of structural members is usually carried out under the precondition for their centric connection and centric supports. In practice however there are numerous examples (bridges, crane girders etc.) of off-center loading transfer and supports placement. The adequate modeling of the structural response in such cases leads to interesting conclusions which deserve the attention of both researchers and practicing engineers. Previous analyses by the same author showed that off-center supports and transversal loadings can cause significant normal forces depending strongly on the axial deformability of the beam. A prismatic Bernoulli-Euler beam of linearly elastic material on eccentric helical and rotational spring supports is considered in the paper. The main purpose is to study the influence of varying spring stiffness on the horizontal reaction. This appears to depend on the stiffness of the helical spring which prevents the restrained non-central fibers to deform in accordance to the Bernoulli-Euler hypothesis. The horizontal reaction decreases with decreasing helical spring stiffness and vice versa. It vanishes if no such spring is attached irrespective of the rotational springs and supports location. On the other hand, with the two types of springs attached the horizontal reaction decreases with the increase in the rotational spring constant. The reason is that the stiffer the rotational spring the smaller angle of rotation of the terminal section and in turn the smaller displacements for the non-central fibers. With this in mind it is logical to expect the increase in the horizontal reaction with the supports eccentricities. Special attention is paid to the bilaterally clamped beam where a transcendental equation has been worked out relating the rotation angle of the section of zero curvature to the loading and system parameters. The solution is based on the exact differential equation of the elastic line and large displacements.*