



ИЗСЛЕДВАНЕ НА СВОБОДНИТЕ ТРЕПТЕНИЯ В СЛУЧАЯ НА ДВА МОДЕЛА НА ВЪЖЕ

Валентин Недев, Петър Павлов, Светлана Лилкова-Маркова

val_nedev@abv.bg, pdp_mech_fhe@uacg.bg, lilkovasvetlana@gmail.com

*Висше транспортно училище “Тодор Каблешков” – София 1574, Гео Милев 158
University of Architecture, Civil Engineering and Geodesy, София, бул. Христо Смирненски 1
БЪЛГАРИЯ*

Ключови думи: *въже, еластична опора, уравнения на Лагранж*

Резюме: *Известно е, че деформируемото твърдо тяло е предмет на изследване в Съпротивление на материалите, докато в Теоретичната механика се разглежда абсолютно твърдо тяло. Често практически задачи от механиката на деформируемото твърдо тяло могат да се изследват с методите на Теоретичната механика. Такива методи са приложени в настоящата статия за свободните трептения на гъвкаво неразтегливо въже.*

Въжето е подпряно на две неподвижни ставни опори и е разделено на равен брой елементи, образуващи начупена линия. Теглото на въжето е също взето пред вид. Приемайки подхода на Съпротивление на материалите елементите са линейно деформируеми и са свързани един с друг с нееластични опори. Кръговите честоти на свободните трептения са определени след прилагане на уравненията на Лагранж от втори ред. Удължението на елементите е намерено чрез потенциалната енергия на деформацията.

За прилагане на методите на Теоретичната механика е изследван друг модел – съвкупност от абсолютно корави елементи, свързани с еластични опори. Техният коефициент на еластичност може да бъде определен от уравнението за потенциалната енергия на деформацията за двата модела.

1. Въведение

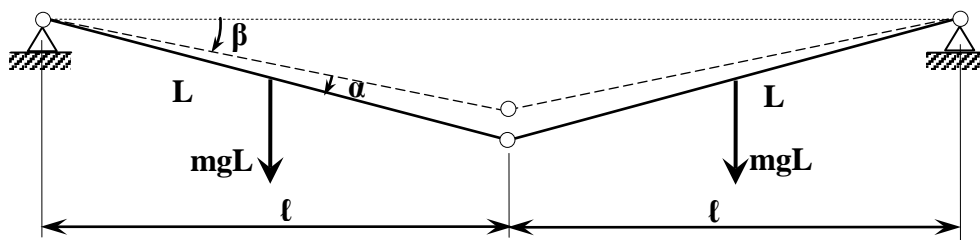
Теоретичната механика и Съпротивление на материалите са фундаментални дисциплини в обучението на строителните инженери.

Това изследване е свързано с разширяване на предмета на Теоретичната механика. Въжета се изучават в повечето курсове на Съпротивление на материалите [2]. Тази статия се отнася до тяхното изследване във връзка с динамиката.

Разгледано е въже на две опори. Представени са два модела. Уравненията на Лагранж [1], [3] са приложени и кръговите честоти на свободните трептения са изчислени.

2. Първи модел на системата – деформируеми елементи и стави

Разгледаната система с два сегмента е показана на фиг. 1.

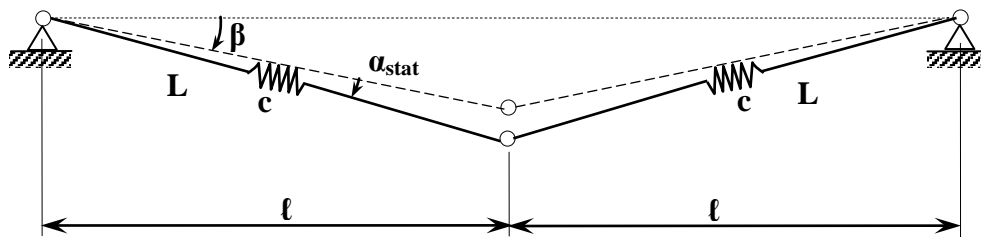


Фиг.1. Дискретен модел на въже

Геометричните и физични параметри са:

m - маса на всяка от частите за единица дължина; g - земно ускорение; $\ell_{sup} = 2\ell$ - разстояние между опорите; $2L$ - дължина на свободното въже; E - модул на линейните деформации; A - площ на напречното сечение на въжето. Двата ъгъла β и α определят положенията на недеформираното и на деформираното въже респективно.

Двата деформирани елемента са моделирани с линейни пружини по техните направления. Това е видно на фиг. 2. Пружините имат равни линейни коравини $c = EA/L$.



Фиг.2. Първи модел на системата

Потенциалната енергия на системата се представя с двете компоненти

$$(2.1) \quad E_p = E_p' + E_p''.$$

E_p' е потенциална енергия, свързана със силата на тежестта. E_p'' е свързана с пружините. Те са представени с изразите:

$$(2.2) \quad E_p' = -2mgL^2 \cos(\alpha/2 + \beta) \sin \frac{\alpha}{2};$$

$$(2.3) \quad E_p'' = \frac{EA}{L} \left[\frac{\ell \sin(\alpha/2 + \beta) \sin \frac{\alpha}{2}}{\cos(\alpha + \beta) \cos \beta} \right]^2.$$

Стойността на ъгъла β е $\arccos \frac{1}{L}$.

След тяхното заместване в (2.1) изразът за потенциалната енергия е

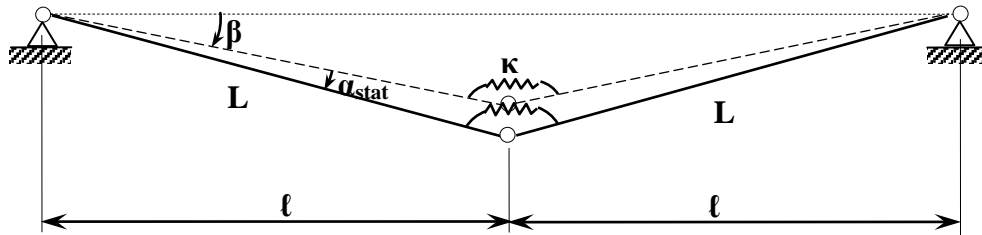
$$(2.4) \quad E_p = -2mgL^2 \cos(\alpha/2 + \beta) \sin \frac{\alpha}{2} + \frac{EA}{L} \left[\frac{\ell \sin(\alpha/2 + \beta) \sin \frac{\alpha}{2}}{\cos(\alpha + \beta) \cos \beta} \right]^2.$$

Положението на статическо равновесие на разглежданата система се определя от условието за минимум на потенциалната енергия

$$(2.5) \quad \frac{dE_p}{d\alpha} = 0.$$

От това уравнение ъгълът α_{stat} за равновесното положение се изчислява. Решението на уравнението може да се получи числено.

3. Втори модел на системата – недеформируеми елементи и ъглови пружини между тях



Фиг.3. Втори модел на системата

Моделът на системата е представен на фиг 3.

Коравината k на ъгловата пружина се определя от условието за равенство на потенциалните енергии в равновесното положение за двата модела на системата. Това условие се представя така

$$(2.6) \quad E_p'' = \overline{E_p''}.$$

$\overline{E_p''}$ е потенциална енергия на ъгловата пружина и е

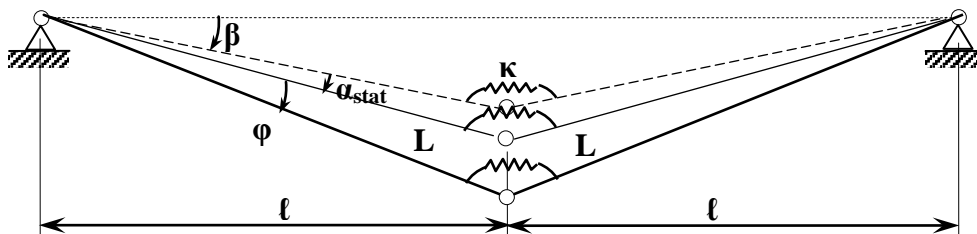
$$(2.7) \quad \overline{E_p''} = 2k\alpha_{stat}^2.$$

След заместване на E_p'' от (2.3) и $\overline{E_p''}$ от (2.7) (в случая на $\alpha = \alpha_{stat}$) в (2.6) се определя коравината на ъгловата пружина:

$$(2.8) \quad k = \frac{EA}{2\alpha_{stat}^2 L} \left[\frac{\ell \sin(\alpha_{stat}/2 + \beta) \sin \frac{\alpha_{stat}}{2}}{\cos(\alpha_{stat} + \beta) \cos \beta} \right]^2.$$

4. Уравнения на Лагранж в случая на втория модел на системата

Основната координата е ъгълът φ , показан на фиг. 4.



Фиг.4. Модел на възето за кръговите честоти на свободните трептения

Разгледани са само симетрични трептения. Известното уравнение на Лагранж е

$$(2.9) \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial E_k}{\partial \dot{\varphi}} \right) - \frac{\partial E_k}{\partial \varphi} = 0.$$

Кинетичната енергия на системата е

$$(2.10) \quad E_k = \frac{1}{2} (2mL^3/3) \dot{\varphi}^2.$$

След полагането

$$(2.11) \quad a_{11} = \frac{2}{3} mL^3,$$

изразът за кинетичната енергия приема вида

$$(2.12) \quad E_k = \frac{1}{2} a_{11} \dot{\varphi}^2.$$

Потенциалната енергия може да бъде намерена от израза (2.1). Двете събираеми са

$$(2.13) \quad E_p' = 2mgL^2 \cos(\alpha_{stat} + \beta + \varphi/2) \sin \frac{\varphi}{2} \text{ and}$$

$$(2.14) \quad E_p'' = 2k\varphi(\varphi + \alpha_{stat}).$$

Допуска се, че трептенията са малки и поради

$$(2.15) \quad \sin \frac{\varphi}{2} \approx \frac{\varphi}{2}; \quad \cos \frac{\varphi}{2} \approx 1.$$

Потенциалната енергия се представя във формата

$$(2.16) \quad E_p = \frac{1}{2} [4k + mL^2 g \sin(\alpha_{stat} + \beta)] \varphi^2 + [4k\alpha_{stat} - mL^2 g \cos(\alpha_{stat} + \beta)] \varphi.$$

Изразът в скобите на второто събираемо е равен на нула от условието за статично равновесие.

След заместването

$$(2.17) \quad c_{11} = 4k + mL^2 g \sin(\alpha_{stat} + \beta)$$

в (2.16) потенциалната енергия приема вида

$$(2.18) \quad E_p = \frac{1}{2} c_{11} \varphi^2.$$

Изразите (2.12) и (2.18) се заместват в уравнението на Лагранж (2.9) и след преобразования се получава диференциалното

$$(2.19) \quad \ddot{\varphi} - \frac{c_{11}}{a_{11}} \varphi = 0.$$

Кръговата честота на свободните трептения е

$$(2.20) \quad \omega = \sqrt{\frac{c_{11}}{a_{11}}}.$$

5. Числени резултати

Изследвано е стоманено въже. Неговите физични и механични характеристики са $L = 1,0025 \ell$; $E = 1,6 \cdot 10^8 \text{ kN/m}^2$. Диаметърът на въжето е $d = 0,016 \text{ m}$ и $EA = 32170 \text{ kN}$.

Силата на тежестта за единица дължина на елементите е $q = 78,5 \text{ kN/m}^3 * 0,0002 \text{ m}^2 = 0,0157 \text{ kN/m} \approx 0,02 \text{ kN/m}$.

Таблица 1. Стойности на α_{stat} според l_{sup}

l_{sup} [m]	20	40	60	80	100	120	140	160
α_{stat} [rad]	0,0025	0,0025	0,0025	0,0025	0,0025	0,0025	0,0025	0,0025
α_{stat} [°]	0,143	0,258	0,373	0,487	0,573	0,688	0,774	0,859

Таблица 2. Кръгови честоти според l_{sup}

l_{sup} [m]	k [kNm/m']	a_{11}	c_{11}	ω [s ⁻¹]
20	153690	1,339	614760	677,581
40	47440	10,712	189740	133,089
60	22740	36,153	90940	50,154
80	13290	85,700	53180	24,912
100	9610	167,376	38430	15,152
120	6670	289,226	26690	9,606
140	5270	459,280	21090	6,776
160	4270	685,570	17090	4,992

6. Заключение

Представеното изследване е полезно за моделиране на деформируеми системи. Уравненията на Лагранж са използвани за практическата задача за динамика на въжета. Дефинираните модели на въже са нови представяния на системата.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Musalimov, V. M. Analytical Mechanics, Lagrange's equations of second order, State University ITMO, Saint Petersburg, 2007 (In Russian).
- [2] Kisliakov, S. D., N. V. Kardzhiev, M.M. Kishkilov, P. T. Kolev, V. K. Drumev Strength of materials, Technika, Sofia, 1986 (In Bulgarian).
- [3] Argiris, J. H., J. St. Doltinis. On the Natural Formulation and Analysis of Large Deformation Coupled Thermomechanical Problems. *Comp. Math. Appl. Mech. Eng.*, 25 (1981), No. 3, 195-253.