

ОПТИМИЗАЦИЯ ФОРМАТА НА ЕЛЕМЕНТИ ОТ КОНСТРУКЦИИ В ТРАНСПОРТНОТО МАШИНОСТРОЕНЕ

Добринка Атмаджова

atmadzhova@abv.bg

*Висше транспортно училище “Тодор Каблешков”,
катедра “Транспортна техника”
Ул. “Гео Милев” 158, София 1574, БЪЛГАРИЯ*

***Ключови думи:** транспортно машиностроене, оптимизация на машинстроителни конструкции*

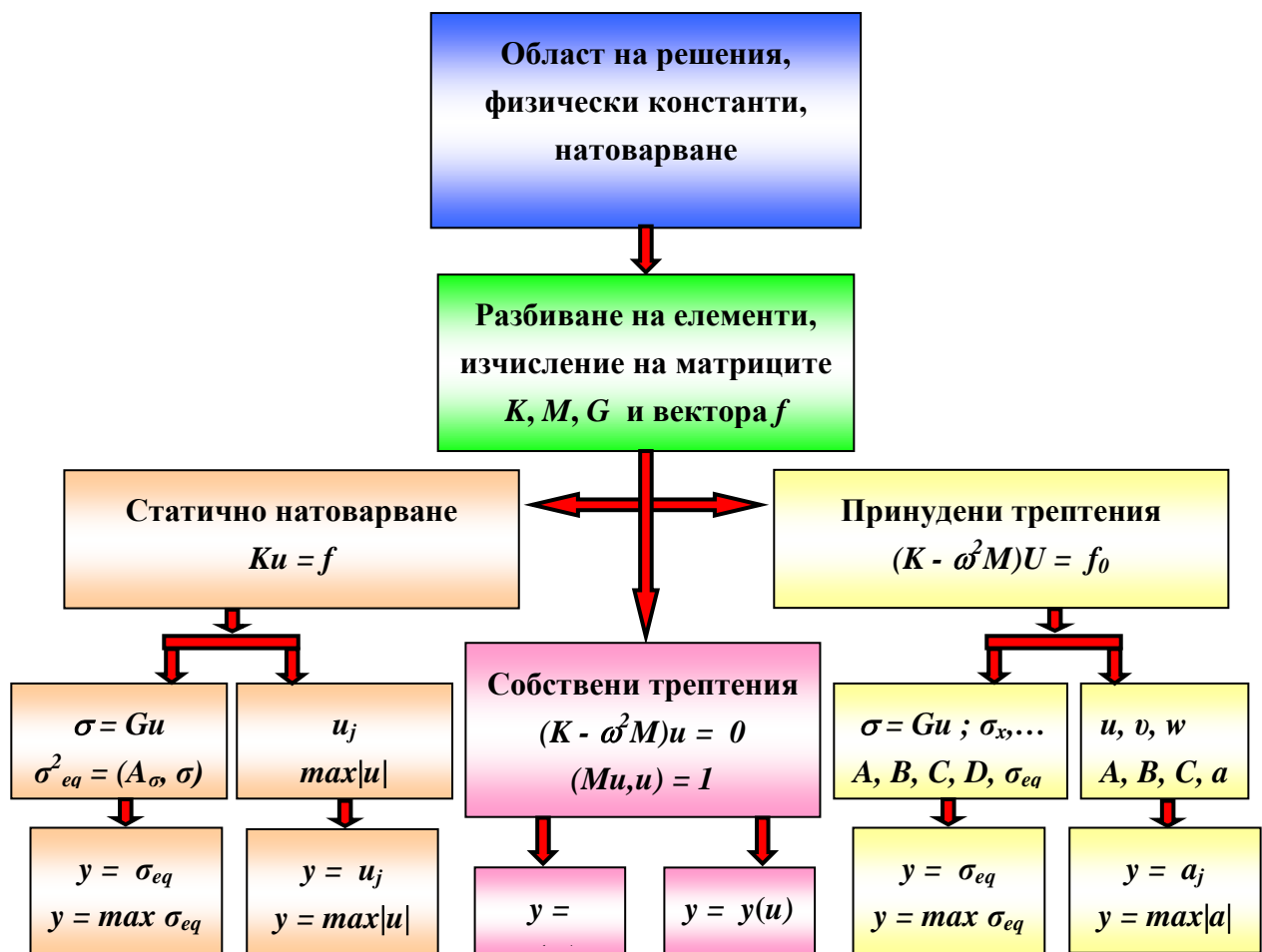
***Резюме:** В статията се разглежда методика за решението на задачи за оптимизация на елементи от конструкции в транспортното машиностроене чрез програмата MATLAB. Целевите функции са: статически премествания и напрежения, амплитуди на динамичните премествания и напрежения, функции на собствени честоти и форми на трептения. Като примери са разгледани моделни конструкции: 1, 2 и 3 мерни, за които са решени задачи за минимизация за статични или динамични напрежения. Такива са: надлъжни трептения на греда, статични напрежения в тънка ососиметрична черупка - тънкостенен резервоар на вагонна конструкция и динамични напрежения в турбинна лопатка. Проведените изследвания показват, че програмата MATLAB и нейното разширение (PDE Toolbox, Optimization Toolbox, FEMLAB) напълно са подходящи за решаването на задачи от оптимизацията в механиката на твърдо деформируемо тяло.*

1. Увод

Под оптимизация на машиностроителни конструкции се разбира: подобряване на качеството, намаляване на теглото, увеличаване коефициента на полезно действие (КПД), повишаване на рентабилността и т.н, [6, 7, 14]. Много често се пристъпва към задачата за намиране минимум на функцията на няколко променливи при различни ограничения на аргументите: равенства, неравенства и др. подобни. При тяхното решение ще се изменя формата на конструкцията (греда, пластина, черупка, ососиметрично или тримерно тяло), така, че да се максиминизира или минимизира нужния параметър: преместване или еквивалентно напрежение в зададена точка, неговата амплитуда, собствената честота на трептения, отклонение на възела от формата в зададена точка. За тези целеви функции е необходимо използването на метода за оптимизация отчитащ информация за градиента.

2. Алгоритъм за изчисляване на целевата функция

Изходните данни за пресмятане по МКЕ обикновено са геометричната област, заемана от тялото, физическите характеристики на материала и данни на натоварване. По геометричните данни се прави мрежа (разбивка на области) от крайни елементи. За едномерни области такова омрежавяване не представлява трудност и обикновено се прави ръчно. Отначало областта на изменение на параметъра по дължина се разбива равномерно (с помощта на функцията `linspace` в пакета MATLAB [5, 8, 15]) или със съгъстявания в местата с предполагаема концентрация на напреженията. После се намират координатите на възлите и се изчисляват всички необходими величини.



Фиг.1. Алгоритъм за изчисляване на целевата функция.

Относно двумерните и тримерните функции за разбиването на крайни елементи се използва функцията PDE Toolbox [17] и FEMLAB [13]. След това в схемата на МКЕ, за всеки краен елемент, се изчисляват неговата матрица на коравина K_e , масовата матрица M_e , векторът на усилията във възлите f_e и матрицата на прехода от премествания към напрежения G_e (тук e – представлява номер на крайния елемент). С тях се запълва матрицата K, M, G и вектора f за цялата конструкция. За обработката на последните матрици в MATLAB се осъществява с помощта на механизма `Sparse`.

Получените матрици K , M , G и векторът f се използват при решаването на различни задачи и изчисляване на съответните целеви функции.

Блок схемата на алгоритъма за изчисляване е показана на фиг.1. Всеки от етапите на изчисляване се свежда към прилагането на някои формули.

Последователност при изчисляване на целевата функция при различни постановки на оптимизационната задача.

Да разгледаме постановката на някои задачи и свързаните с тях целеви функции.

2.1. Целеви функции в задачи за статическо натоварване

В задачите от статиката векторът на възловите усилия f е постоянен (не зависи от времето) и основното уравнение на МКЕ има вида:

$$(1) \quad Ku = f$$

където: u - вектор на възловите премествания.

Ако целевата функция е y – *преместването в зададената точка (възел)*, то ние просто избираме координата с необходимия номер j – u_j (максималното преместване), която се минимизира:

$$(2) \quad y = \max_{\forall j \in \lambda} |u_j|,$$

където: λ - подмножество на множеството от координати на вектора u . За търсене на максималния елемент и неговия номер в MATLAB се използва стандартно вградена функция **max**.

Ако целевата функция y е свързана с *напреженията*, то след решението на системата (3) намираме компонентите на напреженията σ във възлите, средата на елементите или в други необходими точки:

$$(3) \quad \sigma = Gu$$

В задачата за оптимизиране на целевата функция преди всичко се явява максималното еквивалентно напрежение:

$$(4) \quad y = \max_{\forall j} \sigma_{eq}.$$

Изчислявайки напреженията σ по (3) намираме вектора на квадратите на еквивалентното напрежение σ_{eq}^2 по зависимостта:

$$(5) \quad \sigma_{eqj}^2 = (A_{j\sigma}, \sigma)$$

където: $A_{j\sigma}$ – положително определена числова матрица, която зависи от избора на якостната теория и точката, в която се изчислява координатата на вектора σ_{eq}^2 .

От получените за всяка координата квадратен корен избираме максималната стойност.

2.2. Целеви функции в задачите за принудени трептения

В тази задача векторът на възловите усилия f се счита за периодическа функция на времето:

$$(6) f = f_0 e^{i\omega t}$$

където: f_0 – комплексна амплитуда на външното натоварване; ω – честота на принудените трептения; i – имагинерна единица.

Основното уравнение на МКЕ в задачата за принудените трептения има вида:

$$(7) M \frac{d^2 u}{dt^2} + Ku = f$$

По-коректни резултати се получават при използване на модели на амплитудно-независимо триене [11]. Приложението им води до използването на комплексен модул на еластичност, който се явява линеен множител в матрицата на коравината. Затова вместо матрицата K в уравнение (7) ще бъде:

$$(8) K^* = K \left(1 + \frac{i\Psi}{2\pi} \right)$$

където: Ψ – логаритмичен декремент на трептенията.

Уравнението за амплитудата на принудените трептения има вида:

$$(9) (K^* - \omega^2 M)U = f_0$$

Това решение в MATLAB се осъществява по стандартен метод, който работи с комплексни числа, а също и с реални.

Нека целевата функция u е **максималното отклонение** на какъвто и да е възел с номер j от положение на равновесие или максимално по всички възли. За целта избираме от вектора U (U – комплексна амплитуда на трептенията) с координати $\{u, v, w\}$ - линейни премествания на конкретен възел. Означаваме с $a(t)$ отклонението на възела от положение на равновесие. Намираме максимума на тази функция спрямо аргумента t , по израза:

$$(10) a_{max} = \sqrt{\frac{A + C + |D|}{2}}$$

където: параметрите A, B, C и D са функции на реалните и имагинерните части на координатите $\{u, v, w\}$:

$$(11) A = (u^{Re})^2 + (v^{Re})^2 + (\omega^{Re})^2; B = u^{Re} u^{Im} + v^{Re} v^{Im} + \omega^{Re} \omega^{Im};$$

$$C = (u^{Im})^2 + (v^{Im})^2 + (\omega^{Im})^2 \text{ и } D = A - C + 2iB$$

От определените за всеки възел стойности по израз (10) избираме максималната стойност и това ще бъде максималната амплитуда на трептенията при зададена честота на принудените трептения ω . Ако е необходимо да се намери максималната амплитуда на трептенията в зададен честотен диапазон $[\omega^-, \omega^+]$, то е необходимо да се намери тази честота, на която максималното от израз (10) има максимум по ω . Затова можем да използваме функцията **fminbnd**.

В задачата за оптимизиране целевата функция е максималното отклонение на възела от положение на равновесие:

$$(12) \quad y = \max |a|$$

Нека целевата функция y е **амплитудата на еквивалентното напрежение** в коя да е точка или максималното от всички точки еквивалентно напрежение. С комплексната амплитуда U и зависимост (3) намерим амплитудата на напреженията в необходимите точки (също комплексни). Да изчислим еквивалентното напрежение с отчитане отместването на фазите на координатите на σ .

Избираме от вектора σ напрежения в една конкретна точка: $\{\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{xy}, \tau_{yz}, \tau_{zx}\}$.

Максималната интензивност на напреженията се определя по изказа:

$$(13) \quad \sigma_{eq_{max}} = \frac{1}{2} \sqrt{A + C + |D|}$$

където: параметрите A , B , C и D са функции на реалните и имагинерните части на вектора на напреженията $\{\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{xy}, \tau_{yz}, \tau_{zx}\}$:

$$(14) \quad \begin{aligned} A &= (\sigma_x^{Re} - \sigma_y^{Re})^2 + \dots + 6[(\tau_{xy}^{Re})^2 + \dots] \\ B &= (\sigma_x^{Re} - \sigma_y^{Re})(\sigma_x^{Im} - \sigma_y^{Im}) + \dots + 6(\tau_{xy}^{Re} \tau_{xy}^{Im} + \dots) \\ C &= (\sigma_x^{Im} - \sigma_y^{Im})^2 + \dots + 6[(\tau_{xy}^{Im})^2 + \dots] \text{ и } D = A - C + 2iB \end{aligned}$$

Тук с многоточие е отбелязано наличието на още две слагаеми.

При необходимост намираме максималната амплитуда в зададен честотен диапазон $[\omega^-, \omega^+]$.

В задачата за оптимизиране на целевата функция се явява максималната интензивност на напреженията:

$$(15) \quad y = \max \sigma_{eq}$$

Целеви функции в задачите за принудени трептения

В тази задача е необходимо намирането на нетривиално решение на уравнението

$$(16) \quad (K - \omega^2 M)u = 0$$

и допълнително нормиращото условие

$$(17) \quad (Mu, u) = 1$$

В MATLAB тази задача се решава с помощта на функцията **eigs**.

Изчислява се целевата функция y , зависеща от собствените честоти ω или форми u , т.е.:

$$(18) \quad y = y(\omega) \text{ или } y = y(u)$$

3. Приложения на метод за оптимизация формата на елементи от конструкции в транспортното машиностроене

3.1 Надлъжни трептения на греда

Зададена е стоманена греда дълга $L = 0,3m$ с правоъгълно напречно сечение (височина $h = 30mm$ и широчина $b = 20mm$) със запънат край от ляво и свободен десен край. Модул на еластичност $E = 1,96 \cdot 10^{11} Pa$, плътност на материала $\rho = 7,8 kN/m^3$. За сметка на вариране на височината в различни сечения в граници от 20 до $40 mm$ е нужно максимизиране на първата собствена честота на надлъжни трептения. Аналитическото решение на тази задача се получава с помощта на принципа на максимум на Л.С. Понтрягин [3]. Ще използваме принципа за сравнение на резултатите.

За пресмятане по метода на крайните елементи (МКЕ) взимаме краен елемент с две степени на свобода, по една във възел, с линейна функция на преместванията по дължината ос [2, 4, 11]. Матриците на коравината и масите на този елемент имат вида:

$$(19) \quad K_e = \begin{pmatrix} \frac{EF}{\ell} & -\frac{EF}{\ell} \\ -\frac{EF}{\ell} & \frac{EF}{\ell} \end{pmatrix} \text{ и } (20) \quad M_e = \begin{pmatrix} \frac{\rho F \ell}{3} & \frac{\rho F \ell}{6} \\ \frac{\rho F \ell}{6} & \frac{\rho F \ell}{3} \end{pmatrix}$$

където ℓ - дължина на елемента, $F = bh$ – площ на напречното сечение.

Определят се производните $\partial K_e / \partial h_e$ и $\partial M_e / \partial h_e$.

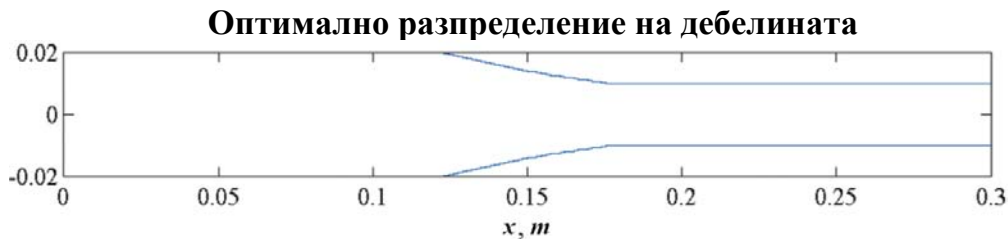
Всяка от матриците K_e и M_e зависи от височината само на своя елемент, затова при изчисляване на $\partial \omega / \partial h_e$ по формулата:

$$(21) \quad \frac{\partial \omega}{\partial b} = \frac{1}{\omega} \left(\left(\frac{\partial K}{\partial b} - \omega^2 \frac{\partial M}{\partial b} \right) u, u \right)$$

за построението на производни от матриците на коравина и масата на цялата конструкция $\partial K_e / \partial h_e$ и $\partial M_e / \partial h_e$ е необходимо въвеждането “сумиране” само на един елемент. Затова изчисляването на градиента отнема допълнително време в сравнение с изчислението на самата функция. M – функцията за изчисляване на първата собствена честота на надлъжни трептения и нейния градиент чрез програмата MATLAB има вида:

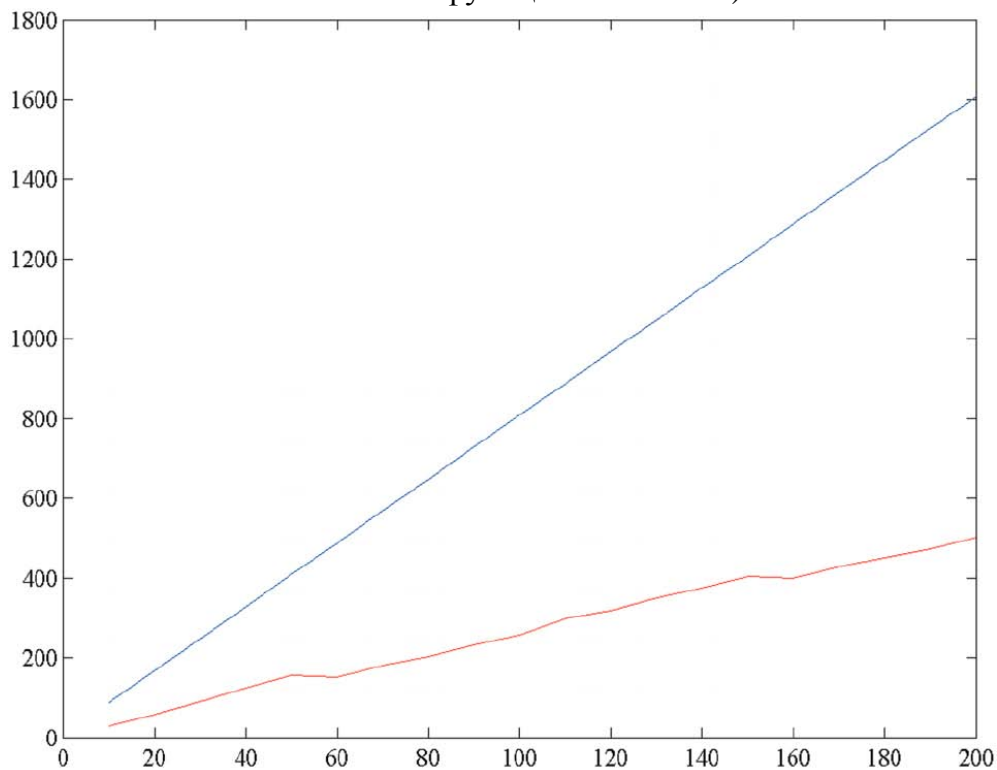
```
function [om1,g]=BarOm1(h)
% 1-ва надлъжна честота и нейният градиент в зависимост от променливата нисочина
ne=length(h); % размерността на задачата – броят на елементите
np=ne+1; % броят на възлите
E=1.96e11; % E, Pa
rho=7800; % rho, kg/m3
L=0.3; % цялата дължина, m
b=0.02; % ширина на елемента
l1=L/ne; % дължина на един елемент
Ebl1=E*b/l1; % за матрицата на коравината и нейните производни
dMS=[[Ebl1,-Ebl1];[-Ebl1,Ebl1]]; % dK/dh
rhobl3=rho*b*l1/3; % за масовата матрица и нейните производни
dMM=[[rhobl3,rhobl3/2];[rhobl3/2,rhobl3]]; % dM/dh
MatrM=sparse(np,np); % масова матрица
MatrS=sparse(np,np); % матрица на коравините
for k=1:ne, % запълваме за всеки елемент и сумираме
MatrS(k:k+1,k:k+1)=MatrS(k:k+1,k:k+1)+dMS*h(k);
MatrM(k:k+1,k:k+1)=MatrM(k:k+1,k:k+1)+dMM*h(k);
end
MatrS(1,1)=1e100; % запъване от ляво
options DISP=0;
warning off % решаваме проблема за собствените стойности
[Evect,Eval,flag]=eigs(MatrS,MatrM,1,'SM',options);
warning on
if logical(flag), % няма точност
error('Точност не е достигната')
end
om1=Eval^0.5; % 1-ва честота на надлъжни трептения
dZ=dMS-om1^2*dMM; % dZ/dh на един елемент
g=zeros(ne,1); % за градиента
for k=1:ne, % изчисляваме градиента
u=Evect(k:k+1); % нормиране формата на елемента
g(k)=(u'*dZ*u)/(2*om1); % формула (21)
end
om1=-om1; % максимизиране
g=-g;
return
```

Тази m-функция се използва за решаване на задачата за оптимизация с помощта на функцията **fmincon**. Броят на крайните елементи варира от **10** до **200**. Всички елементи са с еднаква дължина за всяка мрежа решението напълно повтаря резултатите приведени в [3], с точност до дискретизацията на непрекъснатата функция.



Фиг.2. Оптимална конфигурация на гредата. Показано е разпределението на височината на сечението по дължината на гредата (в зададени граници) при която първата собствена честота на надлъжните трептения ще бъде максимално възможна.

На фиг.2 е показано разпределението на височината за най-малката мрежа от **200** елемента, а на фиг.3 – зависимостта на трудността на решение от размерността на задачата. На тази фигура със синя линия е показано броя на изчисленията на целевата функция и нейният градиент, ако ограниченията на височината са зададени във вида: $LB \leq X \leq UB$, а с червена – ако $A * X \leq B$ (вида на ограниченията е в съответствие с функцията **fmincon**).



Фиг.3. Зависимост на трудността на функцията **fmincon**, в зависимост от размерността на задачата. Синята линия показва броя на числовите решения на целевата функция и градиента ѝ, ако ограниченията на височината са дадени във вида: $LB \leq X \leq UB$, а с червена – ако $A * X \leq B$.

Вижда се, че за вторият вариант е 3 пъти по-изгоден и за големи размерности трудността се приближава до 2,5 изчисления на измерване. Броят на изчисленията на функцията и градиента се определя с помощта на централен брояч, а с опцията **OUTPUT.funcCount** връща неправилният резултат.

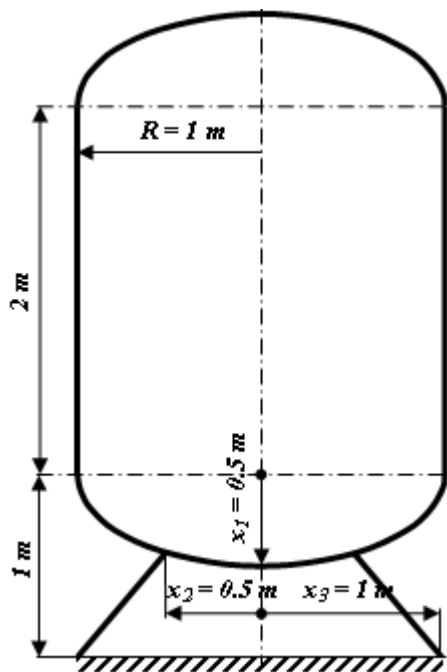
3.2. Статични напрежения в тънка ососиметрична черупка

Тънкостенен резервоар показан на фиг.4 представлява ососиметрична черупка, състояща се от една цилиндрична, две елипсоидни и една конична

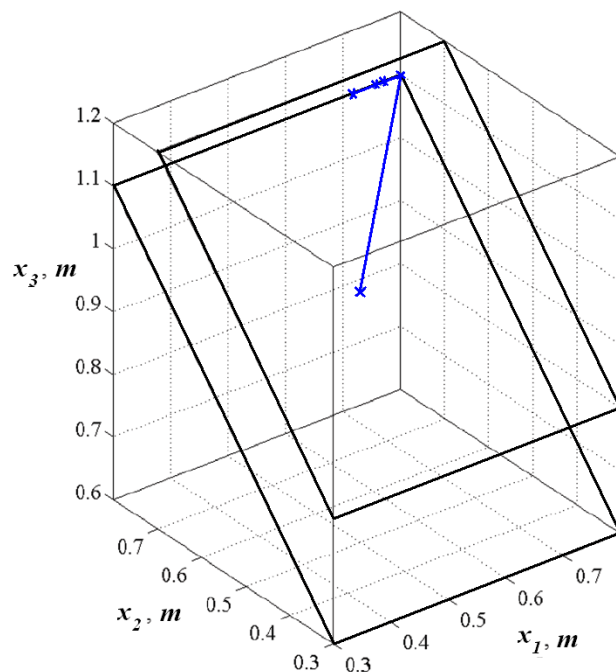
части. Той е изработен от стоманени листове с дебелина 5mm и запълнен с течност до върха на цилиндричната част. Натоварването е от силата на теглото и налягането на течността. Закрепването е запъване по долния край на коничната част. Варирант се всички размери (в метри) показани на фиг.4, а именно:

- $x_1 \in [0,3;0,8]$ – дълбочина на еластичната част (размера на малката полуос)
- $x_2 \in [0,3;0,8]$ – радиус на свързване между елипсоидната и коничната части
- $x_3 \in [0,6;1,2]$ – радиус на долната опора.

Допълнителното ограничение е : $0,3 \leq x_3 - x_2 \leq 0,5$. За изчисляване на вариранта на отбелязаните параметри е нужно оптимизирането на максималното провисване или максималната интензивност на напреженията.



Фиг.4. Тънкостенен резервоар на вагонна конструкция с ососиметрична конструкция, състоящ се от цилиндрична, елипсоидни и конични части.



Фиг.5. Процес на определяне на минимума. Синята линия показва процеса на търсене на минимума на максималната интензивност на напреженията в зададена област. От начало процесът води към ъглова точка на многостенника от областта на допустимите решения, след което започва да се повдига по x_1 до достигане на минимума.

За пресмятането на тази конструкция се използва едномерен краен елемент във вид на тънкостенна конична черупка описана в [2, 4, 9, 10, 12]. В ососиметричния случай на този елемент има шест степени на свобода. Функцията на преместването: линейна за преместване на образуващата и кубически полином за нормалните премествания. При пресмятане на цилиндричната и елипсоидните части се разбиват на **200** елемента всяка, а коничната на **100** елемента.

Дадената задача за оптимизация има малка размерност **5** и с помощта на функцията **fmincon** се решава много бързо. Така за минимизиране на максималното провисване бяха направени **15** изчисления на целевата функция и нейния градиент, при което максималното провисване намалява от **12,538 mm** до

4,3868 mm. Намерените стойности на аргументите са: $x_1 = 0,8$; $x_2 = 0,8$ и $x_3 = 1,1$. Възможно високата скорост на сходимост се обяснава с това, че минимума тук се достига в ъгловата точка на многостенника от допустими стойности, а алгоритъма е заложен във функцията **fmincon**.

Задачата за минимизацията на максималната интензивност на напреженията е решена за **16** изчислявания на целевата функция и градиента. целевата функция се снижава от **261,438 MPa** до **123,3748 MPa**. Оптималното решение е при $x_1 = 0,7715072$; $x_2 = 0,8$ и $x_3 = 1,1$. Тук алгоритъма от начало отива на същата ъглова точка, както и в предишния случай, а след което започва да пълзи по x_1 , докато не намира минимума. Процесът на търсене е показан на фиг.5 със синята линия.

3.3. Динамични напрежения в турбинна лопатка

Средната повърхност на турбинната лопатка може да бъде зададена във вид на вектор-функция на два параметъра:

$$(22) \quad x = x(u, v); y = y(u, v); z = z(u, v);$$

На повърхността (u, v) с помощта на PDE Toolbox от програмата MATLAB може да се построи областта на решения и раздробяването на крайни елементи. Координатите на възлите се изчисляват по зависимостта (22). Също така във вид на функция на параметрите u и v , може да се задават дебелината на черупката в различни точки и разпределението на натоварването.

Решаваме задачата за оптимизация формата на турбинната лопатка по критерия на максимална интензивност на напреженията. Лопатката е изработена от легирана стомана, показана чрез проекция в равнината xOy (размерите са в метри, x - по направление по радиуса) на фиг.6. Граничното условие – запъната в крайното сечение (на фиг.6 е от ляво). Средната повърхност и началното разпределение на дебелината на профила се задават с уравненията:

$$(23) \quad z = 200y(0,1 - y)(0,05 - 0,04x), m \text{ и } h = 100(y + 0,01)(0,01 - y)(0,05 - 0,04x), m$$

Лопатката на турбината се завърта с ъглова скорост $\omega = 3000 \text{ об/мин}$. На нея действат центробежни сили в радиално направление, независещи от времето и динамическото натоварване с честота ω и амплитуда по зависимостта:

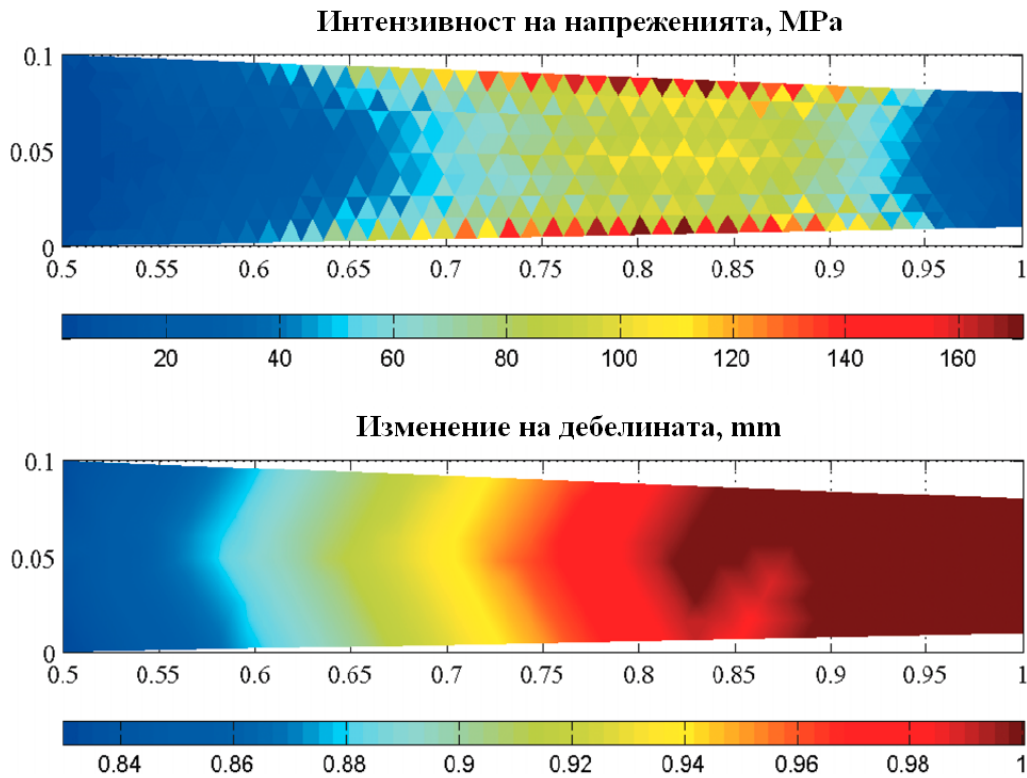
$$(24) \quad p = 10(x - 0,5)^2(0,2 - y), MPa$$

действаща по направление z .

Изисква се минимизация на максималната интензивност на динамични напрежения при условия за промяна на дебелината на профила в неголеми граници: не повече от $\pm 1mm$ във всеки възел. При това не трябва да се нарушава плавността на профила, изменението на ъгъла на наклона във всяка възлова линия трябва да бъде не повече от $5 \cdot 10^{-4}$.

При изчисленията се използват триъгълни равнинни крайни елементи с линейно променлива дебелина, построени на основата на елемент с постоянна

дебелина [8]. Той обезпечава непрекъснатост на изменението на дебелината на профила. Варира се дебелината във възлите в оказаните по-горе ограничения. Крайно елементната мрежа се построява един път и нейните данни се предават на процедурата за изчисляване на целевата функция и нейните параметри. максималната интензивност на напреженията се изчисляват по методиката в [1], а частните производни по дебелината се определят по зависимостите изведени в т.2.2.



Фиг.6. Минимизация на интензивността на напреженията в турбинна лопатка. На горното изображение е показано разпределението на интензивността на напреженията в оптимизираната конфигурация, а на долното – изменение дебелината на профила в процеса на решение на задачата за оптимизация .

Поради малките граници на вариране на дебелината картината на разпределение на интензивността на напреженията в изходната и оптимална конфигурация малко се отличават. На фиг.6 са показани интензивността на напреженията на оптималната конфигурация (отгоре) и изменението на дебелината на оптималната конфигурация в сравнение с изходната (отдолу). Вижда се, че максималното удебеление е към опашката на лопатката, а минималното в опорната част. В лопатки с такива размери центробежните сили влияят незначително, поради което увеличението на дебелината на профила води към общо намаление на динамичните напрежения. В дадения пример за пресмятане на такова неголямо изменение на геометрията максималната интензивност на напреженията намаляват от **247 МРа** до **171 МРа**. Оптимизационната задача е решена за **168** итерации.

Заклучение

1. В статията се разглеждат възможностите за приложение на метод за оптимизиране формите на елементи от конструкции в транспортното машиностроене чрез програмата MATLAB.

2. За решение задачите на оптимизация се използва функцията **fmincon** от пакета Optimization Toolbox. Използват се някои свойства на функцията и нейното бързо действие.

3. В статията се разглежда методика за решението на задачи за оптимизация на елементи от конструкции в транспортното машиностроение. Целевите функции са: статични премествания и напрежения, амплитуди на динамичните премествания и напрежения, функции на собствени честоти и форми на трептения. Варира се формата на елемента от конструкцията в зададени граници. За изчисление на целевите функции се използва метода на крайните елементи.

4. Като примери са разгледани моделни конструкции: **1**, **2** и **3** мерни, за които са решени задачи за минимизация за статически или динамически напрежения.

5. Проведените изследвания показват, че програмата MATLAB и нейното разширение (PDE Toolbox, Optimization Toolbox, FEMLAB) са напълно подходящи за решаването на задачи от оптимизацията в механиката на твърдо деформируемо тяло.

Литература

- [1] Ахмаджова Д., Оптимизация на машиностроителни конструкции.— №1, 2009
- [2] Бидерман В. Л. Механика тонкостенных конструкций. М.: Машиностроение, 1977
- [3] Гринев В. Б., Филиппов А. П. Оптимизация элементов конструкций по механическим характеристикам.—К.: Наукова думка, 1975
- [4] Зенкевич О. Метод конечных элементов в технике.— М.: Мир, 1975
- [5] Йорданов Й. Т. *Приложение на MatLab в инженерните изследвания – Част I и II*. Русе. „Русенски Университет”. 2004
- [6] Кендеров П., Г. Христов, А. Дончев, Математическо оптимизиране, СУ, 1989.
- [7] Кудрявцев Л.Д «Краткий курс математического анализа. Т.2. Дифференциальное и интегральное исчисления функций многих переменных. Гармонический анализ», ФИЗМАТЛИТ, 2002
- [8] Потемкин В. Г. Система инженерных и научных расчетов MATLAB 5.x. В 2-х томах.— М.: Диалог-МИФИ, 1999
- [9] Расчет машиностроительных конструкций на прочность и жесткость / Шапошников Н. Н., Тарабасов Н. Д., Петров В. Б., Мяченков В. И.— М.: Машиностроение, 1981
- [10] Расчеты машиностроительных конструкций методом конечных элементов / Мяченков В. И., Мальцев В. П., Майборода В. П. и др. Под общ. ред. Мяченкова В. И.— М.: Машиностроение, 1989
- [11] Сегерлинд Л. Применение метода конечных элементов.— М.: Мир, 1979
- [12] Справочник по сопротивлению материалов / Писаренко Г. С., Яковлев А. П., Матвеев В. В. Отв. ред. Писаренко Г. С.— К.: Наукова думка, 1988
- [13] FEMLAB (<http://www.matlab.ru/femlab/default.asp>).
- [14] BABIC A., Dr. PETROVIC Eksperimentano-numericna identifikacija u razvoju teretnih vagona. – Scientific – expert conference on railway RAILCON’08, Nis, Srbija, 2008
- [15] Konstantinov M. and P. Petkov. *Robust systems control: analysis and synthesis with MATLAB+CD ROM*. ABC Technics–Sofia, 2002
- [16] Optimization Toolbox User’s Guide.— The MathWorks, Inc., 1997.
- [17] Partial Differential Equation Toolbox User’s Guide.— The MathWorks, Inc., 1997