**Механика Транспорт Комуникации**

***Научно списание***

**ISSN 1312-3823**

**брой 3, 2009 г.**

**статия № 0437**

**http://www.mtc-aj.com**

# МЕТОД ЗА ПОДОБРЯВАНЕ НА СЕЛЕКТИВНОСТТА НА НЕРЕКУРСИВНИ ЦИФРОВИ ФИЛТРИ

**Петър Апостолов**
*p_apostolov@abv.bg*

*ИСТ-МВР, София 1799*
**БЪЛГАРИЯ**

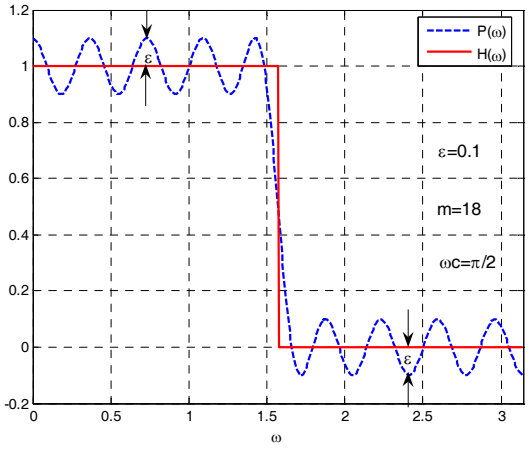
***Резюме:*** *Предложени са нова базисна функция и полином за апроксимиране на идеализирана предавателна функция на нискочестотен филтър. Получена е зависимост за определяне на предавателна функция на същия вид цифров филтър с подобрена селективност. Направено е сравнение с филтри, получени по метода на Паркс и Маклилън. Даден е пример за реализиране на филтъра и метод за получаване на линейна фазова характеристика.С предложения метод се получават филтри с по-добра селективност в сравнение с тези на Паркс и Маклилън.*
***Ключови думи:*** *цифров FIR филтър, полином, апроксимация, предавателна функция, честотна характеристика.*

## ВЪВЕДЕНИЕ

Цифровизацията на съвременната електронна техника изисква използването на филтри с линейни фазови характеристики. Такива свойства притежават цифровите филтри с крайни импулсни характеристики, които са известни в литературата като цифрови FIR филтри. Синтезът им се извършва, чрез подходяща апроксимация на идеална предавателна функция на нискочестотен филтър от вида

$$(1) \qquad H_d\left(e^{j\omega}\right)=\begin{cases}1e^{j\omega}, & 0\le\omega\le\omega_c\\ 0 \quad , & \omega_c<\omega\le 2\pi\end{cases},$$

където $\omega_c = 2\pi f_c$ е граничната честота на филтъра. Най-популярните методи за синтез са с използване на прозоречни (тегловни) функции на Бартлет, Блекман, фон Хан, Хенинг, Гаус, Кайзер [3], Хаусдорф [1] и др. Най добри селективни свойства имат цифровите филтри, на Паркс и Маклилън [4]. Те се получават чрез равновълнова апроксимация (Фиг.1) на идеална предавателна функция (ПФ) на нискочестотен филтър с базисна функция $\cos x$. В настоящата работа е предложен нов метод за синтез на цифрови FIR филтри, които имат по-добри селективни свойства от тези на Паркс-Маклилън.




**Фиг.1 Апроксимация Паркс-Маклилън**

## ТЕОРЕТИЧНА ПОСТАНОВКА

Теоретична база на метода е теоремата за чебишевски алтернанс. Въз основа на нея могат да бъдат направени следните твърдения.

♦ако една функция $f(x)$ е дефинирана и непрекъсната в затворен интервал, тя може да бъде апроксимирана с тригонометричен полином $P_m(x)$ от степен $m$ с базисна функция $\cos x$;

♦полиномът представлява единствено и най-добро приближение, ако функцията на грешката $w(x)=f(x)-P_m(x)$, има не по-малко от $m+2$ екстремума в дефиниционната област;

♦екстремумите са алтернативни и равни по абсолютна стойност на положително число $\varepsilon$.

Идеята на метода е да се извърши апроксимация на идеална предавателна функция с полином от четна степен $m$, който отговаря на теоремата за чебишевски алтернанс, на който осцилациите се сгъстяват около граничната честота $\omega_c=\pi/2$ в интервала $\omega\in[0,\pi]$. Така получените филтри ще имат по-добра селективност от тези на Паркс-Маклилън. Сгъстяване на осцилациите се получава, ако се „модулира" аргументът на базисната функцията $\cos x$, по следния начин

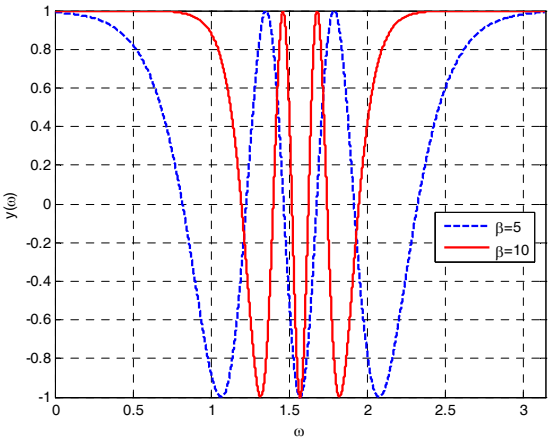
$$(2)\quad y(\omega)=\cos\left\{\frac{m\pi}{2}\left[\tanh\left(\beta\frac{\omega}{\pi}-\frac{\beta}{2}\right)+1\right]\right\},$$

където $\beta$ е параметър, който променя степента на „сгъстяване" на осцилациите на функцията.

На Фиг.2 е показана графиката на функцията при $m=6$ за стойности на параметъра $\beta=5$ и $\beta=10$.

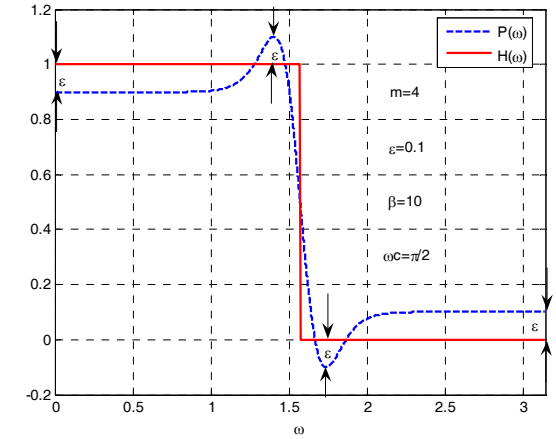
Определянето на апроксимиращия полином се извършва с алгоритъм на Ремез, който се състои в итерационно решаване на система от $m+2$ линейни уравнения. Получените $m+2$ решения представляват коефициентите на полинома и грешката на апроксимацията $\varepsilon$. Полиномът има вида

$$(3)\ P_m(\omega)=\sum_{k=1}^{m+1}b_k\cos\left\{\frac{\pi(k-1)}{2}\left[\tanh\left(\beta\frac{\omega}{\pi}-\frac{\beta}{2}\right)+1\right]\right\}.$$




**Фиг.2 Модулация на аргумента** $m=6$

На Фиг.3 е показана апроксимация с полинома при $m=4$ и $\beta=10$.




**Фиг.3. Апроксимация с предлагания метод**

От сравнението на Фиг.1 и Фиг.3 се вижда, че с предлагания метод (при еднакви стойности на $\varepsilon$), апроксимацията се извършва с полином от по-ниска степен.

Коефициентите на филтъра се получават от тези на полинома в последователността

$$(4)\qquad h_n=\frac{b_{m+1}}{2},\frac{b_m}{2},\ldots,\frac{b_2}{2},b_1,\frac{b_2}{2},\ldots,\frac{b_m}{2},\frac{b_{m+1}}{2},$$

където $n=2m+1$ е редът на филтъра. По този начин ПФ придобива вида

$$(5)\qquad H(\omega)=\sum_{k=1}^{n}h_k\times$$

$$\times\exp\left\{-j(n-k)\frac{\pi}{2}\left[\tanh\left(\frac{\beta\omega}{\pi}-\frac{\beta}{2}\right)+1\right]\right\}=$$

$$=\sum_{k=1}^{n}h_k\exp\left[j(n-k)\varphi(\omega)\right];\ \omega\in[0,\pi].$$

От последното равенство се вижда, че ПФ на предлагания метод е с честотно зависим фазов множител $\varphi(\omega)$. Зависимостта

(6) $$\varphi(\omega) = -\frac{\pi}{2}\left[\tanh\left(\frac{\beta\omega}{\pi} - \frac{\beta}{2}\right) + 1\right]$$

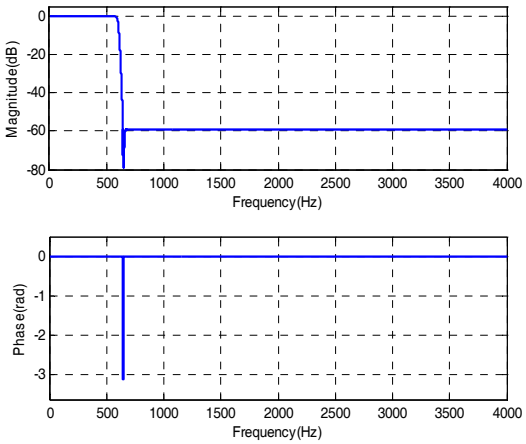
отразява модулацията на фазата на предавателната функция. Тя води до промяна на линейността на фазовата характеристика, респ. равномерността на груповото време на закъснение. Този недостатък може да бъде компенсиран, като на изхода на филтъра се извърши модулация, която коригира фазовото изкривяване с функцията

(7) $$\varphi_{out}(\omega) = m\frac{\pi}{2}\left[\tanh\left(\frac{\beta\omega}{\pi} - \frac{\beta}{2}\right) + 1\right].$$

## РЕАЛИЗАЦИЯ НА ФИЛТЪРА

Идеята е да се използва бързо преобразуване на Фурие в $2^N$ точки (дискрети), като $N$ е цяло число.

Реализацията ще бъде онагледена с пример за синтез на цифров филтър от девети ред $n = 9$; $\beta = 144$; средна транзитна честота $f_t = 600\,\text{Hz}$; широчина на транзитната лента $\Delta f = 80\,\text{Hz}$ честота на дискретизация $f_s = 8\,\text{kHz}$. Коефициентите на филтъра са: $h_1 = h_9 = 0$; $h_2 = h_8 = -0.0314$; $h_3 = h_7 = 0$; $h_4 = h_6 = 0.2814$; $h_5 = 0.5$. От стойностите им и равенство (4) се вижда, че филтърът има **симетрична импулсна характеристика**. Честотите на пропускане и задържане са съответно $f_c = f_t - \Delta f/2 = 560\,\text{Hz}$ и $f_{stop} = f_t + \Delta f/2 = 640\,\text{Hz}$. Ще бъде разгледана реализация при $N = 9$, т.е с 512-точково преобразуване на Фурие (512-FFT). На Фиг.4 са показани теоретично изчислените честотни характеристики на филтъра. Затихването на мощността в лентата на задържане е 59.1512dB, което е около един милион пъти.




**Фиг.4. Теоретични честотни характеристики**

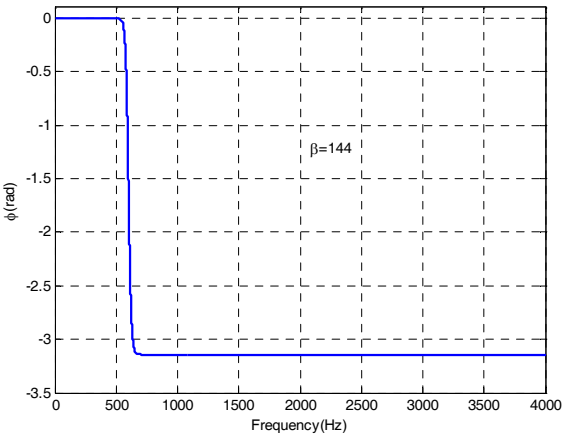
Извършва се следната процедура:

1. Изчисляват се $2^N$ стойности на фазовия множител (6), мащабиран (Фиг.5) спрямо честотата на дискретизация

(8) $$\varphi_i = \frac{\pi}{2}\left[\tanh\left(\beta\frac{x}{\max(x)} - \frac{\beta}{2}\right) + 1\right],$$

където

(9) $$x = i^y;\ y = \left[\log_2\left(f_s/f_t\right)\right]^{-1};\ i = 1 \div 2^N.$$




**Фиг.5. Фазов множител – честотна характеристика**

2. Създава се масив $\theta$ от $2^N$ таблици, всяка от които съдържа по $n$ комплексни числа

(10) $$\theta_{i,k} = h_k \exp\left[-j(k-1)\varphi_i\right];\ k = 1 \div n,$$

където $h_k$ са коефициентите на филтъра.

3. В таблица $\varphi_{out}$ се въвеждат $2^N$ комплексни стойности на израза

(11) $$\varphi_{out\ i} = \exp\left[ j\left(\frac{n-1}{2}\right)\varphi_i \right]$$

4. След аналогово-цифрово преобразуване, сигналът постъпва във входен $2^N$-разреден буфер.

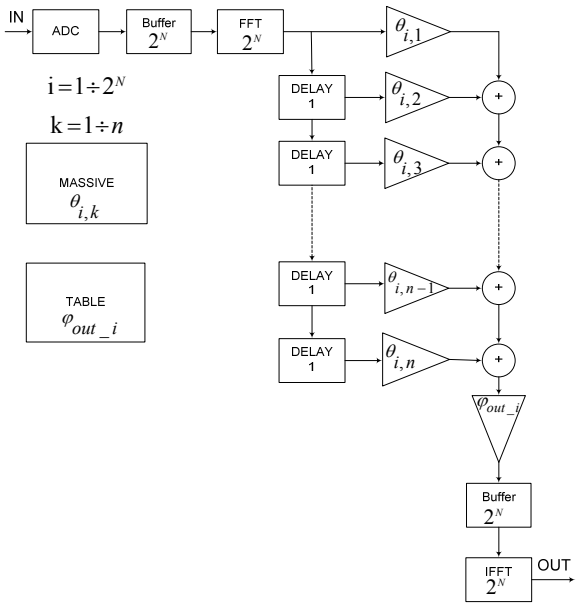
5. Извършва се дискретно преобразуване на Фурие. Получават се $2^N$ комплексни честоти.

6. Умножава се всяка честота със комплексните числа от съответната й таблица $\theta_{i,k}$. За всяка от честотите се получават $n$ комплексни числа, които се сумират. Получената сума се умножава със съответната стойност $\varphi_{out\ i}$ от таблицата $\varphi_{out}$. Последното действие отразява компенсирането на фазовото изкривяване (7).

7. Изчислените стойности се натрупват в изходен $2^N$ - разреден буфер и се извършва обратно преобразуване на Фурие. Филтрираният сигнал се подава към изхода.

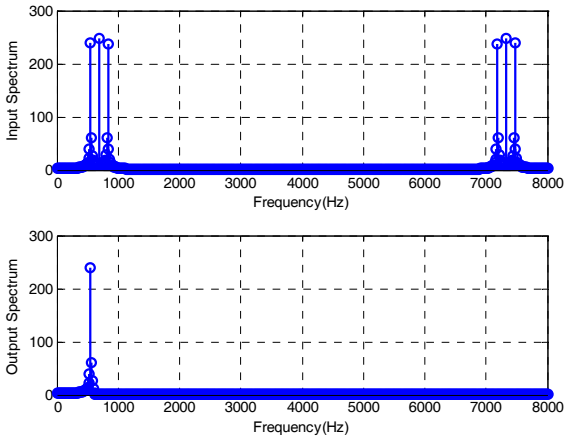
8. Взимат се следващите $2^N$ стойности от входния буфер и се връща към т.5.

На Фиг.6 е показана блокова схема на филтъра.



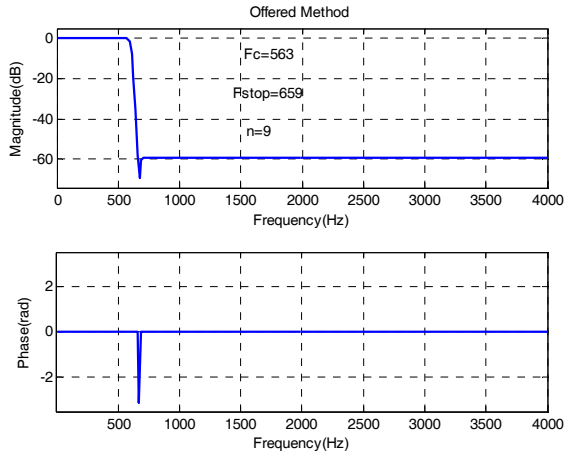

**Фиг.6. Блокова схема**

По описания алгоритъм е направена симулация с програма Matlab. На входа се подава сума от 3 хармонични сигнала с честоти 550, 687.5, и 819.5Hz. На Фиг. 7 са показани входната и изходна спектрални характеристики



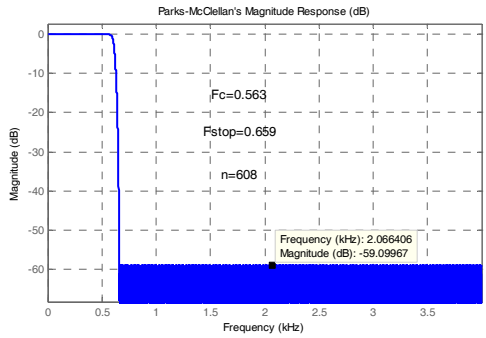

**Фиг.7. Спектър на входен/изходен сигнал с 512-FFT**

Използването на право и обратно 512-FFT води до намаляване на точността на възпроизвеждане на честотните характеристики. Тя се изразявава в нарастване на широчината на транзитната лента на филтъра, което е показано на Фиг.8. Вижда се, че граничната честота е по-висока с 3Hz, а честотата на задържане с 19Hz. Транзитната лента е по-голяма с 16Hz.



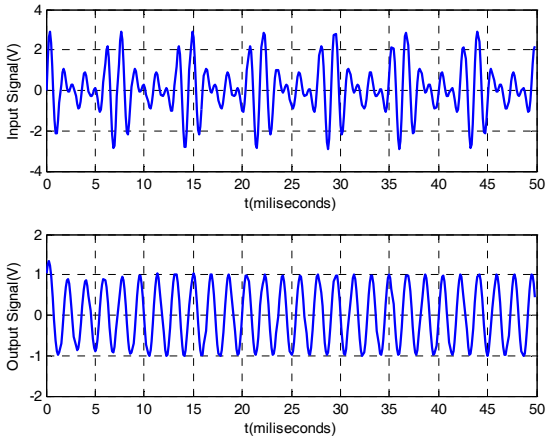

**Фиг.8. Честотни характеристики след 512-FFT *n*=9**

На Фиг. 9 е показана АЧХ на филтър на Паркс-Маклилън със спецификацията на филтъра от Фиг.8.




**Фиг.9. Филтър на Паркс-Маклилън, *n*=608, АЧХ**

Вижда, че редът на филтъра $n$=608 е над 67 пъти по-висок. На Фиг.10 са показани формата на входния и изходен сигнал на филтъра от разглеждания пример




**Фиг.10. Форма на входен/изходен сигнал**

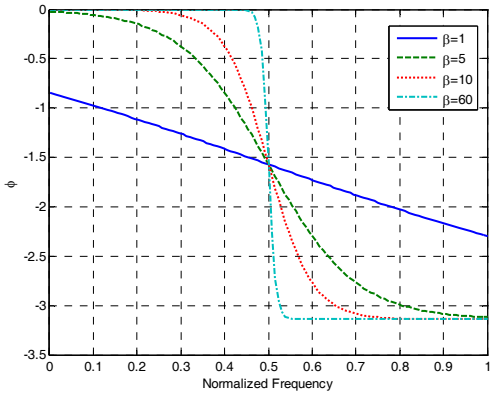
## АНАЛИЗ НА РЕЗУЛТАТИТЕ

Полезният ефект в предложения метод се дължи на следните две обстоятелства:

♦коефициентите на предавателната функция се получават от оптимална апроксимация, която е равновълнова в лентите на пропускане и задържане (Фиг.3);

♦всяко събираемо на предавателната функция (5) се умножава с множител $\varphi(\omega)$, който е фазова характеристика на **резонансна верига** (Фиг.5), докато при другите FIR филтри тя е линейна. Ако се направи връзка с теорията на аналоговите филтри, това е равносилно на **повишаване на Q-фактора** на звената на филтъра, което води до **повишаване на селективността**.

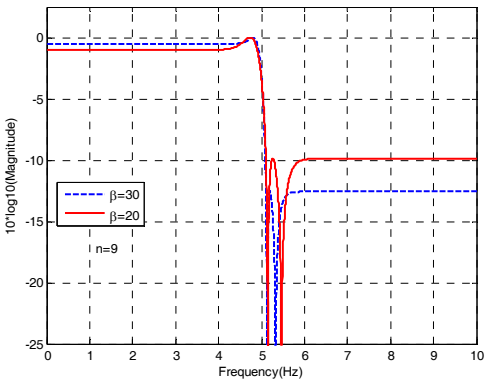
В предложения метод параметърът $\beta$ е еквивалентен на Q-фактор. Теоретично $\beta$ може да бъде произволно голям. Когато $\beta \to \infty$ фазовата характеристика на Фиг.5 ще придобие правоъгълен контур, което съответства на безкраен Q-фактор. Разбира се, такова звено не може да бъде реализирано. На Фиг.11 е показано как се променя фазовият множител в зависимост от параметъра $\beta$




**Фиг.11. Фазов множител в зависимост от $\beta$**

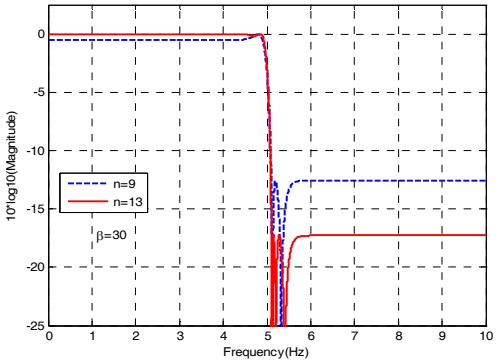
Нарастването на стойността на параметъра $\beta$ води до **увеличаване на селективността** на филтрите. На Фиг. 12 са сравнени АЧХ на филтри от 9-ти ред при стойности на параметъра $\beta$ 20 и 30.

Предложеният метод има едно много ценно свойство. Благодарение на нелинейната промяна на мащаба, показана с равенства (8) и (9), филтрите **не променят реда си при промяна на отношението между транзитната честота и честотата на дискретизация**. При метода на Паркс-Маклилън това не е така. Редът на филтъра нараства с увеличаване на отношението между тези две честоти.




**Фиг.12. Сравнение на АЧХ**

Повишаването на реда на филтъра при предлагания метод също води до **нарастване на селективността** му. На Фиг.13 са сравнени АЧХ на филтри от 9-ти и 13 ред.




**Фиг.13. Сравнение на АЧХ**

Недостатък на метода е неточността, която се получава от преобразуванията на Фурие. За примера даден в предходната точка грешката за граничните честоти е под 3%. Относителното нарастването на транзитната лента е под 3%. Грешката може да бъде намалена, ако се използва преобразуване на Фурие с повече дискрети.

Както е известно, реализацията на операцията конволюция в честотната област се реализира по-бързо от операцията конволюция във времевата област [2] при брой на дискретите на входните сигнали по-голям от 32. Ето защо правото и обратно преобразуване на Фурие се използват за повишаване на бързодействието на цифрови FIR филтри от по-висок ред. Такива филтри обикновено се изработват като интегрални схеми и намират приложение във военните технологии. Това определя и **главното предимство на предлагания метод – могат да се конструират бързодействащи филтри с многократно по-малък брой умножители**.

Практическа реализация на филтъра от примера е направена в Института за специална техника на МВР.

## ИЗВОДИ

С предложения метод се получават цифрови филтри с подобрена селективност. За разлика от другите цифрови филтри селективността зависи не само от реда, но и от параметър $\beta$, който може да расте неограничено. Филтрите не променят реда си при промяна на отношението между граничната честота и честотата на дискретизация. Имат линейна фазова характеристика. Реализират се с по-малък брой умножители. Недостатък е неточността от преобразуването на Фурие.

Предложеният метод може да бъде използван в практиката.

## ЛИТЕРАТУРА:

[1] Апостолов, П. Приложение на хаусдорфова тегловна функция при синтез на цифрови филтри с крайна импулсна характеристика. Приета за публикуване в списание E+E.

[2] Иванов, Р. Цифрова обработка на едномерни сигнали. АМІ, Габрово, 1999г.

[3] Hamming, R. W. Digital Filters. NY Prentice Hall, 1988.

[4] Parks, T. W., McClellan J. H., A Program for the Design of Linear Phase FIR Digital Filters, IEEE Trans. On Audio and Electroacoustics, Vol. AU -20 pp.196-199, August 1972.

# METHOD FOR IMPROVING THE SELECTIVITY OF DIGITAL FIR FILTERS

**Peter Apostolov**

*Institute for Special Technical Equipment – MI 1799, Sofia, POB 83*
***BULGARIA***

***Keywords:*** *digital FIR filter, polynomial, approximation, transfer function, frequency response*
***Abstract****: A new basis function and polynomial for approximation of ideal low pass filter transfer function are presented in the article. Equation defining the transfer function of digital FIR filter is defined. A comparison with Parks-McClellan FIR filters is shown. An example for filter design and method to obtain a linear phase response is demonstrated. With offered method FIR filters with better selectivity than those by Parks-McClellan can be obtained.* conference@vtu.bg