МЕХАНИКА
ТРАНСПОРТ
КОМУНИКАЦИИ

Научно списание

ISSN 1312-3823
брой 1, 2009 г.
статия № 0340
http://www.mtc-aj.com

МАТЕМАТИЧЕН МОДЕЛ ЗА ДВИЖЕНИЕ НА ДВУОСНА ТАЛИГА В КРИВ УЧАСТЪК ОТ ПЪТЯ

Веселин Емилов Стоянов
ves@vtu.bg

ВТУ „Тодор Каблешков"
София 1574, ул. „Гео Милев" 154, България

Ключови думи: *железопътна талига, математичен модел, движение в крива*

Резюме: *Проведено е изследване и е разработен математичен модел за движение в крива на железопътен двуосен екипаж. Създаден и използван е опростен равнинен модел с повишена точност, чрез въвеждането на коригиращ фактор. Съставен е спомагателен модел, чрез който са определени координатите на контактните точки и свързаните с тях величини.*

Въведение

За провеждане на теоретични и експериментални изследвания на железопътен екипаж (локомотиви, вагони или отделни талиги) е необходимо съставянето на математични модели за квазистатично вписване и реализирането им за различни параметри на еластичност.

В хода на изследването се решават следните по-важни задачи:

• определяне разположението на колоосите в криватаресп. хлабините “реборд - релса” и ъглите на атака между колелата и релсите;

• определяне разположението на екипажа като цяло включително относителните хоризонтални премествания напречно и надлъжно на колоосите (буксите) спрямо рамата, съответните хоризонтални усилия между тях;

• определяне на нормалните и тангенциални усилия, предавани между колелата и релсите и хоризонталната деформация на последните.

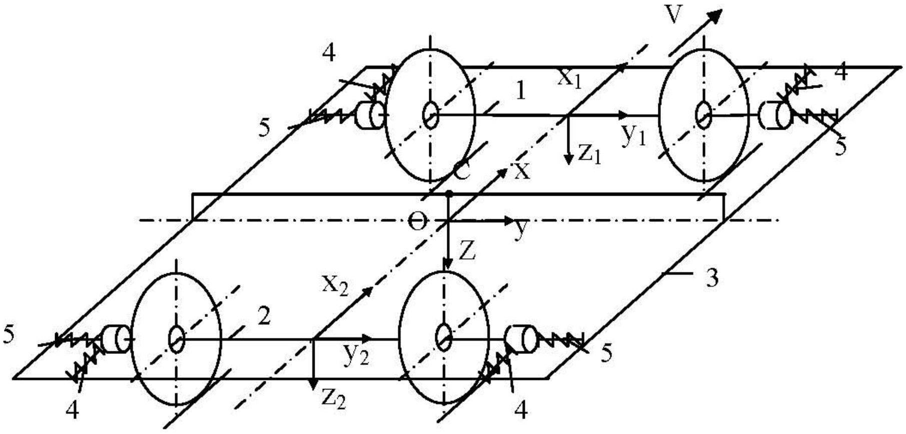
Основни постановки

Нека разгледаме механичната система „талига-колооси-релси", представена на фиг.1 и фиг.2.

В така определената система са зададени:

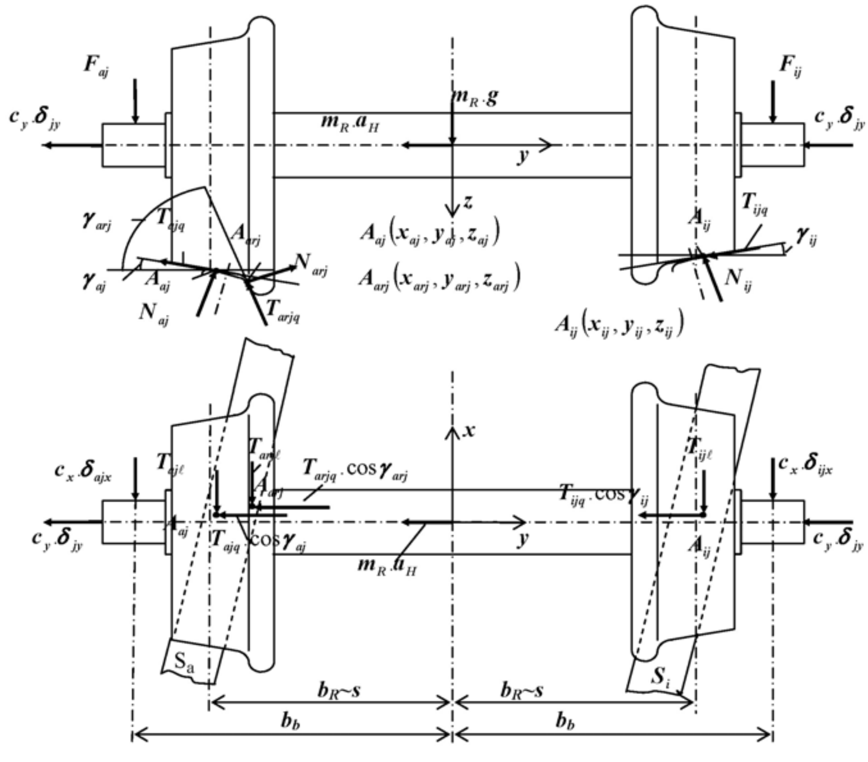
• общите параметри на екипажа (талигата), включително бандажния профил и хоризонталните деформационно-силови характеристики на връзките на колоосите (респ. буксите) с рамата;

• основните параметри на железния път (типа на релсите, профила на релсовите глави, уширението в кривата, хоризонталната еластичност на релсите и експлоатационните фактори на движението (скорост, радиус на кривата и некомпенсирано напречно ускорение)



фиг.1 Общ вид на елементите на талигата

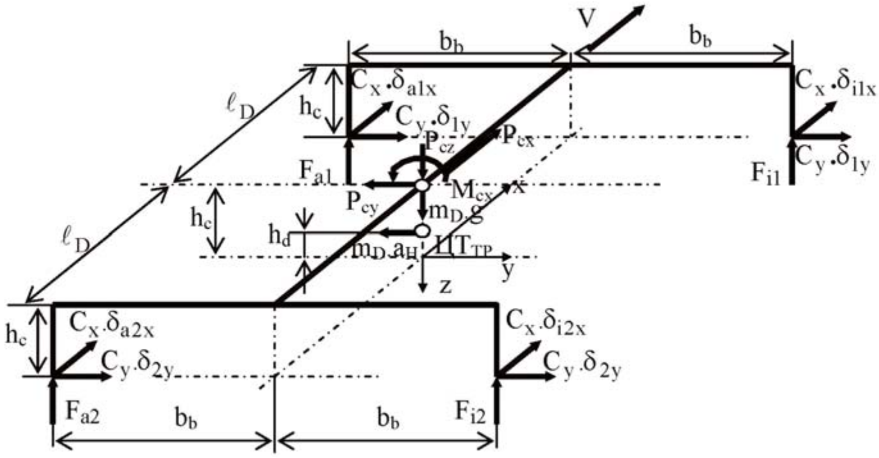
1,2 – колооси. 3 рама. 4,5 еластични буксови връзки



фиг.2 Сили, действащи върху колоос „j” в поглед отзад и отгоре

Съставяне на системата уравнения

Първата група зависимости (силови уравнения) се изразяват с условията за равновесие на 3-те тела от разглежданата механична система – колоос №1, колоос №2 и рамата (фиг.1, фиг.2 и фиг.3).



фиг.3 Сили действащи върху талиговата рама

Надлъжната, напречната и вертикалната компонента на относителната скорост на плъзгане в контактните точки е изведена в [1]. Съответните компоненти на тангенциалната сила на плъзгане $\mathbf{T_{kj}}$ са изразени чрез умножаване на компонентите на относителната скорост на плъзгане с обобщения коефициент на крип $\mathbf{K}$ със съответните индекси в зависимост от направлението, а при някои хипотези – и от местоположението на контактните точки. Навсякъде в уравненията координатата $\mathbf{z_{kj}}$ е заменена със съответния радиус $\mathbf{r_{kj}}$ - съгласно направената уговорка (пак в [1]). Надлъжната координата на всички контактни точки в тези уравнения е приета да бъде равна на нула. При горните условия уравненията, изразяващи условията за равновесие на 3-те тела от разглежданата механична система имат следния вид:

$$\mathbf{(1)}\quad K_{a1x}\cdot\left(1-\frac{y_{a1}}{R}-\frac{r_{a1}}{r_{e1}}\right)+K_{i1x}\cdot\left(1-\frac{y_{i1}}{R}-\frac{r_{i1}}{r_{e1}}\right)+K_{ar1x}\cdot\left(1-\frac{y_{ar1}}{R}-\frac{r_{ar1}}{r_{e1}}\right)+C_x\cdot\left(\delta_{a1x}+\delta_{i1x}\right)=0$$

$$\mathbf{(2)}\quad N_{a1}.\sin\gamma_{a1}+N_{i1}.\sin\gamma_{i1}-K_{a1y}.\alpha_1-K_{i1y}.\alpha_1+N_{ar1}.\sin\gamma_{ar1}-K_{ar1y}.\alpha_1-2.C_y.\delta_{1y}-m_R.a_H=0$$

$$\mathbf{(3)}\quad \begin{aligned}&-N_{a1}.\cos\gamma_{a1}-N_{i1}.\cos\gamma_{i1}-K_{a1y}.\alpha_1.tg\gamma_{a1}-K_{i1y}.\alpha_1.tg\gamma_{i1}-\\&\quad -N_{ar1}.\cos\gamma_{ar1}-K_{ar1y}.\alpha_1.tg\gamma_{ar1}+F_{a1}+F_{i1}+m_R.g=0\end{aligned}$$

$$\mathbf{(4)}\quad \begin{aligned}&-\left(N_{a1}.\cos\gamma_{a1}+K_{a1y}.\alpha_1.tg\gamma_{a1}\right).y_{a1}-\left(N_{i1}.\cos\gamma_{i1}-K_{i1y}.\alpha_1.tg\gamma_{i1}\right).y_{i1}-\\&-\left(N_{a1}.\sin\gamma_{a1}-K_{a1y}.\alpha_1\right).r_{a1}+\left(N_{i1}.\sin\gamma_{i1}+K_{i1y}.\alpha_1\right).r_{i1}-\\&-\left(N_{ar1}.\cos\gamma_{ar1}+K_{ar1y}.\alpha_1.tg\gamma_{ar1}\right)y_{a1}-\left(N_{ar1}.\sin\gamma_{ar1}-K_{ar1y}.\alpha_1\right)r_{ar1}-\left(F_{a1}-F_{i1}\right).b_b=0\end{aligned}$$

$$\mathbf{(5)}\quad K_{a1x}\cdot\left(1-\frac{y_{a1}}{R}-\frac{r_{a1}}{r_{e1}}\right).r_{a1}+K_{i1x}\cdot\left(1-\frac{y_{i1}}{R}-\frac{r_{i1}}{r_{e1}}\right).r_{i1}+K_{ar1x}\cdot\left(1-\frac{y_{ar1}}{R}-\frac{r_{ar1}}{r_{e1}}\right).r_{ar1}=0$$

$$K_{a1x}.\left(1-\frac{y_{a1}}{R}-\frac{r_{a1}}{r_{e1}}\right).y_{a1}+K_{i1x}.\left(1-\frac{y_{i1}}{R}-\frac{r_{i1}}{r_{e1}}\right).y_{i1}+K_{ar1x}.\left(1-\frac{y_{ar1}}{R}-\frac{r_{ar1}}{r_{e1}}\right).y_{ar1}- \tag{6}$$
$$-b_b.C_x.\left(\delta_{a1x}-\delta_{i1x}\right)=0$$

$$K_{a2x}.\left(1-\frac{y_{a2}}{R}-\frac{r_{a2}}{r_{e2}}\right)+K_{i2x}.\left(1-\frac{y_{i2}}{R}-\frac{r_{i2}}{r_{e2}}\right)+K_{ar2x}.\left(1-\frac{y_{ar2}}{R}-\frac{r_{ar2}}{r_{e2}}\right)+ \tag{7}$$
$$+C_x.\left(\delta_{a2x}+\delta_{i2x}\right)=0$$

$$N_{a2}.\sin\gamma_{a2}-N_{i2}.\sin\gamma_{i2}-K_{a2y}.\alpha_2-K_{i2y}.\alpha_2+N_{ar2}.\sin\gamma_{ar2}-K_{ar2y}.\alpha_2- \tag{8}$$
$$-2.C_y.\delta_{2y}-m_R.a_H=0$$

$$-N_{a2}.\cos\gamma_{a2}-N_{i2}.\cos\gamma_{i2}-K_{a2y}.\alpha_2.tg\gamma_{a2}+K_{i2y}.\alpha_2.tg\gamma_{i2}-N_{ar1}.\cos\gamma_{ar2}- \tag{9}$$
$$-K_{ar2y}.\alpha_2.tg\gamma_{ar2}+F_{a2}+F_{i2}+m_R=0$$

$$-\left(N_{a2}.\cos\gamma_{a2}+K_{a2y}.\alpha_2.tg\gamma_{a2}\right).y_{a2}-\left(N_{i2}.\cos\gamma_{i2}-K_{i2y}.\alpha_2.tg\gamma_{i2}\right).y_{i2}-$$
$$-\left(N_{a2}.\sin\gamma_{a2}-K_{a2y}.\alpha_2\right).r_{a2}+\left(N_{i2}.\sin\gamma_{i2}+K_{i2y}.\alpha_2\right).r_{i2}-\left(N_{ar2}.\cos\gamma_{ar2}+\right. \tag{10}$$
$$\left.+K_{ar2y}.\alpha_2.tg\gamma_{ar2}\right).y_{a2}-\left(N_{ar2}.\sin\gamma_{ar2}-K_{ar2y}.\alpha_2\right)r_{ar2}-\left(F_{a2}-F_{i2}\right).b_b=0$$

$$K_{a2x}.\left(1-\frac{y_{a2}}{R}-\frac{r_{a2}}{r_{e2}}\right).r_{a2}+K_{i2x}.\left(1-\frac{y_{i2}}{R}-\frac{r_{i2}}{r_{e2}}\right).r_{i2}+K_{ar2x}.\left(1-\frac{y_{ar2}}{R}-\frac{r_{ar2}}{r_{e2}}\right).r_{ar2}=0 \tag{11}$$

$$K_{a2x}.\left(1-\frac{y_{a2}}{R}-\frac{r_{a2}}{r_{e2}}\right).y_{a2}+K_{i2x}.\left(1-\frac{y_{i2}}{R}-\frac{r_{i2}}{r_{e2}}\right).y_{i2}+ \tag{12}$$
$$+K_{ar2x}.\left(1-\frac{y_{ar2}}{R}-\frac{r_{ar2}}{r_{e2}}\right).y_{ar2}-b_b.C_x.\left(\delta_{a2x}-\delta_{i2x}\right)=0$$

$$C_x.\delta_{a1x}+C_x.\delta_{i1x}+C_x.\delta_{a2x}+C_x.\delta_{i2x}+P_{cx}=0 \tag{13}$$
$$C_y.\delta_{1y}+C_y.\delta_{1y}+C_y.\delta_{2y}+C_y.\delta_{2y}-P_{cy}-m_D.a_H=0 \tag{14}$$
$$-F_{a1}-F_{i1}-F_{a2}-F_{i2}+P_{cz}+m_D.g=0 \tag{15}$$
$$\left(F_{a1}-F_{i1}\right).b_b+\left(F_{a2}-F_{i2}\right).b_b-M_{cx}-P_{cy}.h_c-m_D.a_H.h_D=0 \tag{16}$$
$$\left(F_{a1}+F_{i1}\right).\ell_D-\left(F_{a2}+F_{i2}\right).\ell_D=0 \tag{17}$$
$$C_x.\delta_{a1x}.b_b-C_x.\delta_{i1x}.b_b+C_x.\delta_{a2x}.b_b-C_x.\delta_{i2x}.b_b+2C_y.\delta_{1y}.\ell_D-2C_y.\delta_{2y}.\ell_D=0 \tag{18}$$

където:

R - радиус на кривата по оста на пътя;

$y_{kj}, r_{kj}, \gamma_{kj}$ - напречна координата на контактната точка A_{kj}, респ. радиус на търкаляне и ъгъл на наклона спрямо хоризонталата при $\alpha_j = 0$

r_{ej}, α_j - еквивалентен радиус респ. ъгъл на атака на колооста;

δ_{jy}, C_y - напречно преместване на колооста спрямо рамата респ. напречна коравина на буксовата връзка;

δ_{kjx}, C_x - надлъжно преместване на буксата спрямо рамата респ. надлъжна коравина на буксовата връзка;

m_R, m_D - маса на колооста респ талигата;

a_H, g -некомпенсирано центробежно ускорение респ. земно ускорение;

$2b_b, 2\ell_D$ - напречно разстояние между буксите респ. база на талигата;

F_{kj} - вертикална сила, предавана от рамата върху буксата;

N_{kj} - нормална сила в точката на контакта, предавана върху колелото;

$P_{cy}, P_{cz}, P_{cx}, M_{cx}$ - напречна, вертикална и надлъжна сила и въртящ момент, редуцирани към централния лагер или страничните плъзгалки на талигата;

h_C, h_D - височина на централния лагер, респ. на масовия център на талиговата рама спрямо равнината, определена от осите на колосите.

Втората група уравнения представляват аналитични изрази за ъгъла на атака между колелата и релсите в зависимост от всички хоризонтални премествания в механичната система „рама-колооси-релси". Това са хлабините между ребордите и външната релса σ_i, хоризонталните премествания между буксите и рамата в надлъжно и напречно направление, съответно $\delta_{a1x}; \delta_{i1x}, \delta_{a2x}$ и δ_{i2x} и δ_{1y}, δ_{2y}, а също и хоризонталните деформации на релсата - δ_{s1} и δ_{s2}.

За осигуряване на удобство и възможности за разглеждане на по-сложни случаи – талиги с еластично свързани с рамата колооси (букси) в хоризонталната равнина, не се използват понятията „полюси" и „полюсни разстояния". Съответните зависимости са изведени на базата на всички хоризонтални премествания в механичната система. Използва се принципа на суперпозицията – последователно наслагване на измененията на ъгъла на атака, предизвикани от различните видове премествания.

При разглеждане на условна талига с твърдо свързани с рамата колооси в хоризонтално направление, за условно хордово разположение $A_R^o B_R^o$ (фиг.4) на тази талига, при големина на хлабината „реборд – външна релса" $\sigma_1 = 0$ и $\sigma_2 = 0$, ъгълът на атака $\alpha^0{}_1$ (за първа колоос) и $\alpha^0{}_2$ (за втора) съобразно посоката на движение) ще бъде:

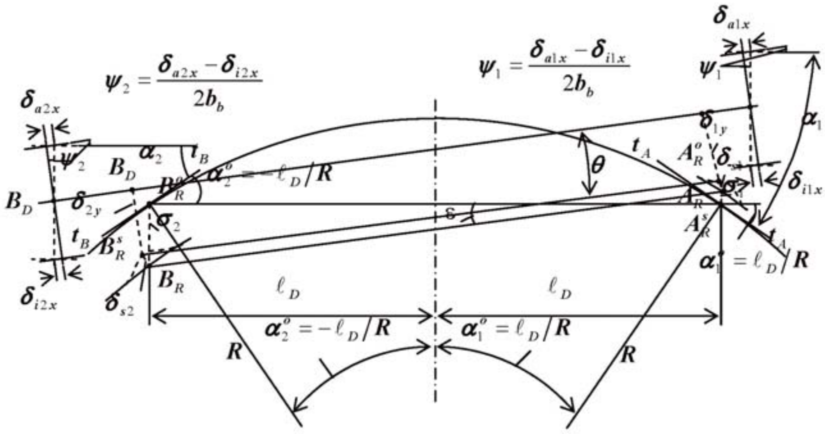
$$\textbf{(19)} \quad \alpha^0{}_1 = \frac{\ell_D}{R}; \; \alpha^0{}_2 = -\frac{\ell_D}{R},$$

а за междинното положение на свободно установяване $A_R B_R$, като се отчете завъртането на талигата на ъгъл ε ($\varepsilon = \dfrac{\sigma_2 - \sigma_1}{2\ell_D}$) спрямо условното хордово разположение, се получава:

$$\textbf{(20)} \quad \alpha_1^M = \frac{\ell_D}{R} + \frac{\sigma_2 - \sigma_1}{2\ell_D}, \quad \alpha_2^M = -\frac{\ell_D}{R} + \frac{\sigma_2 - \sigma_1}{2\ell_D}$$

При отчитане на напречните хоризонтални деформации δ_{s1} и δ_{s2} на външната релса в местата на колоосите, към изразите за ъгъла на атака трябва да бъде добавен обусловеният от тези деформации ъгъл на допълнително завъртане на надлъжната ос на талигата, $\frac{\delta_{s1}-\delta_{s2}}{2\ell_D}$, където положителен знак имат деформациите в посока навън от кривата (положение $A_R^s B_R^s$).

При еластично свързани с рамата букси в хоризонтално направление, ако напречните им премествания спрямо рамата са δ_{1y} и δ_{2y}, то кинематичната надлъжна ос на талигата $A_R^s B_R^s$, определена от средите на колоосите, няма да съвпада с оста на талиговата рама ($A_D B_D$ – фиг.4) и двете оси ще сключват помежду си ъгъл $\theta = \frac{\delta_{1y}-\delta_{2y}}{2\ell_D}$, който ще се добави към споменатите по-горе ъгли и ако стойността му е положителна, ще увеличи ъглите на атака α_1 и α_2.



фиг.4. Схема за определяне геометричните изрази за ъгъла на атака между колелата и релсата в зависимост от разположението на талигата в крива и преместванията на колоосите спрямо рамата

При отчитане и на надлъжните премествания спрямо рамата δ_{a1x}, δ_{i1x}, δ_{a2x} и δ_{i2x} на буксите, отстоящи напречно на разстояние $2b_b$, от тях се получава допълнителен ъгъл на завъртане на колоосите спрямо рамата, съставляващ $\psi_1 = \frac{\delta_{a1x}-\delta_{i1x}}{2b_b}$ и $\psi_2 = \frac{\delta_{a2x}-\delta_{i2x}}{2b_b}$ съответно за 1-ва и 2-ра колооси, който ъгъл следва да се извади от формираната до тук сума. Ако съществува хоризонтална ко́са деформация на талиговата рама на ъгъл ξ_j с положителна посока по часовниковата стрелка (при разглежданото движение), той също следва да се извади от формираната до тук сума. Отчитането на ъгъла ξ_j е възможно, ако към системата се добави още едно уравнение:

(21) $$C_x.\delta_{a1x}.b_b - C_x.\delta_{i1x}.b_b + C_x.\delta_{a2x}.b_b - C_x.\delta_{i2x}.b_b + 2C_y.\delta_{1y}.\ell_D - 2C_y.\delta_{1y}.\ell_D = C_\xi.\xi$$

където C_ξ е ъглова коравина на талиговата рама, подлежаща на теоретично или експериментално определяне.

Ако пренебрегнем цитирания ъгъл и съберем всички споменати до тук премествания (завъртания) в системата изразът за ъгъла на атака за 1-ва и 2-ра колооси окончателно добива вида:

$$\textbf{(22)}\quad \alpha_1 = \frac{\ell_D}{R} + \frac{1}{2\ell_D}.\left[\left(\sigma_2 - \sigma_1\right) + \left(\delta_{1y} - \delta_{2y}\right) + \left(\delta_{s2} - \delta_{s1}\right)\right] - \frac{\left(\delta_{a1x} - \delta_{i1x}\right)}{2b_b}$$

$$\textbf{(23)}\quad \alpha_2 = \frac{-\ell_D}{R} + \frac{1}{2\ell_D}.\left[\left(\sigma_2 - \sigma_1\right) + \left(\delta^y{}_1 - \delta^y{}_2\right) + \left(\delta^y{}_{S1} - \delta^y{}_{S2}\right)\right] - \frac{\left(\delta^y{}_{a2} - \delta^y{}_{i2}\right)}{2b_b},$$

където деформацията на външната релса δ_{s1} респ. δ_{s2} може да се изрази като съотношение между страничния натиск на външната релса Y_{s1} респ. Y_{s2} и хоризонталната коравина C_s на релсата, т.е.:

$$\textbf{(24)}\quad \delta_{s1} = \frac{Y_{s1}}{C_s} = \frac{1}{C_s}.\left(N_{a1}.\sin\gamma_{a1} + N_{ar1}.\sin\gamma_{ar1} - \Re_{a1y}.\alpha_1 - \Re_{ar1y}.\alpha_1\right)$$

$$\textbf{(25)}\quad \delta_{s2} = \frac{Y_{s2}}{C_s} = \frac{1}{C_s}.\left(N_{a2}.\sin\gamma_{a2} + N_{ar2}.\sin\gamma_{ar2} - \Re_{a2y}.\alpha_2 - \Re_{ar2y}.\alpha_2\right),$$

За да се получи по-голяма общност и прецизност на третираните зависимости, координатата σ_j, дефинирана с напречното разстояние до обиране на конструктивната хлабина между реборда на външното колело и вътрешната стена на релсата на вертикално разстояние 10 ***mm*** под върха на релсовата глава, се въвежда за двете колооси, при което може да има и отрицателни стойности в случаите на възкачване на реборда върху релсата.

Третата група зависимости (уравнения) са от кинематично-геометричен характер[2] и се изразяват с аналитични апроксимирани или теоретично изведени функционални зависимости:

- 6 зависимости на координатата „***y***" от координатата „σ" при $\alpha = 0$, имащи вида $y_{kj} = y_{kj}\left(\sigma_j\right)$, а именно:

(26)	$y_{a1} = y_{a1}\left(\sigma_1\right)$;	**(27)**	$y_{i1} = y_{i1}\left(\sigma_1\right)$;
(28)	$y_{ar1} = y_{ar1}\left(\sigma_1\right)$;	**(29)**	$y_{a2} = y_{a2}\left(\sigma_2\right)$,
(30)	$y_{i2} = y_{i2}\left(\sigma_2\right)$ и	**(31)**	$y_{ar2} = y_{ar2}\left(\sigma_2\right)$.

- 6 зависимости на параметъра „***r***" от координатата „***y***", имащи вида $r_{kj} = r_{kj}\left(y_{kj}\right)$:

(32)	$r_{a1} = r_{a1}\left(y_{a1}\right)$;	**(33)**	$r_{i1} = r_{i1}\left(y_{i1}\right)$;
(34)	$r_{ar1} = r_{ar1}\left(y_{ar1}\right)$;	**(35)**	$r_{a2} = r_{a2}\left(y_{a2}\right)$,
(36)	$r_{i2} = r_{i2}\left(y_{i2}\right)$ и	**(37)**	$r_{ar2} = r_{ar2}\left(y_{ar2}\right)$.

- 6 зависимости на параметъра „γ" от координатата „***y***", имащи вида $\gamma_{kj} = \gamma_{kj}\left(y_{kj}\right)$:

(38)	$\gamma_{a1} = \gamma_{a1}\left(y_{a1}\right)$;	**(39)**	$\gamma_{i1} = \gamma_{i1}\left(y_{i1}\right)$;
(40)	$\gamma_{ar1} = \gamma_{ar1}\left(y_{ar1}\right)$;	**(41)**	$\gamma_{a2} = \gamma_{a2}\left(y_{a2}\right)$,
(42)	$\gamma_{i2} = \gamma_{i2}\left(y_{i2}\right)$ и	**(43)**	$\gamma_{ar2} = \gamma_{ar2}\left(y_{ar2}\right)$.

Характерна особеност на функционалните зависимости от последните две групи е, че в зоната на коничните повърхнини на "бандажния профил радиусите на търкаляне $r_{kj}\left(y_{kj}\right)$ са линейни функции, а ъглите на наклона $\gamma_{kj}\left(y_{kj}\right)$ са константи. В случаите на тороидални повърхнини в зоната на търкаляне на бандажния профил (UIC профил DB или БДЖ - 2), радиусите на търкаляне $\mathbf{r}_{kj}\left(\mathbf{y}_{kj}\right)$ могат да се апроксимират аналитично със задоволително приближение като квадратни функции на координатата „*y*”, а ъглите на наклона $\gamma_{kj}\left(\mathbf{y}_{kj}\right)$ - като линейни функции на същата координата. При износен профил в зоната на търкаляне тези функционални зависимости, макар и в общи линии да следват характера на първоначалния профил, имат по-сложен характер. По-сложни са като правило и функционалните зависимости за радиусите на търкаляне и ъглите на наклона също така в преходната зона (закръглението) в основата на реборда.

Изведените уравнения на системата са общо 40, със следното разпределение:

- 18 уравнения, произтичащи от статическите условия за равновесие на двете колоосии рамата;

- 4 уравнения, за разположението в крива на талигата заедно с колоосите и рамата при отчитане на техните взаимни хоризонтални премествания и напречните деформации на релсата,

- 6 уравнения, изразяващи главната координата „y” на контактните точки в зависимост от координатата σ_j при $\alpha_j = 0$ и

- 12 уравнения, за геометрично – кинематичните параметри $\mathbf{r}_{kj}$ и γ_{kj} в контактните точки във функция от координатите $\mathbf{y}_{kj}$.

Тези уравнения в най-общата постановка съдържат следните неизвестни величини, разпределени по групи както следва:

- 6 нормални сили $\mathbf{N}_{kj}$ в контактните точки;

- 12 геометрично-кинематични параметри в контактните точки, а именно 6 радиуси $\mathbf{r}_{kj}$ $\left(\mathbf{k=a,ar,i;j=1,2}\right)$ и 6 ъгли на наклона на бандажния профил γ_{kj} $\left(\mathbf{k=a,ar,i;j=1,2}\right)$;

- 6 напречни координати на контактните точки $\mathbf{y}_{kj}$ $\left(\mathbf{k=a,ar,i;j=1,2}\right)$;

- 4 параметри, определящи положението на колоосите спрямо релсовия път - σ_j $\left(\mathbf{j=1,2}\right)$ и α_j $\left(\mathbf{j=1,2}\right)$;

- 6 параметри, представляващи хоризонтални премествания на буксите спрямо талиговата рама - δ_{kjx} $\left(\mathbf{k=a,i;j=1,2}\right)$ и δ_{jy} $\left(\mathbf{j=1,2}\right)$;

- 2 величини, за еластичните деформации на релсата - δ_{sj} $\left(\mathbf{j=1,2}\right)$;

- 2 величини, за действителните еквивалентни радиуси на колоосите - $\mathbf{r}_{ej}$ $\left(\mathbf{j=1,2}\right)$;

- 1 надлъжна сила в централния лагер, преодоляваща съпротивлението при движение - $\mathbf{P}_{cx}$;

- 4 вертикални сили $\mathbf{F}_{kj}$ ($\mathbf{k=a,i,j=1,2}$), между рамата и колоосите.

Броят на неизвестните в системата се получава 43 (т.е. с 3 повече от броя на уравненията), но решението винаги е възможно като се използват някои дадености при експлоатационните условия – например едноточков контакт на външното колело от задната колоос и др. При необходимост е възможно използването на зависимостта за еквивалентния радиус:

$$(44) \qquad \mathbf{r_e} = \frac{\mathbf{P_a.r_a + P_i.r_i}}{\mathbf{P_a}\cdot\left(\mathbf{1}+\frac{\mathbf{\Delta R_a}}{\mathbf{R}}\right)+\mathbf{P_i}\cdot\left(\mathbf{1}-\frac{\mathbf{\Delta R_i}}{\mathbf{R}}\right)},$$

която при прилагане за двете колооси дава още две уравнения.

При конкретните приложения на предложения метод, може да бъде намален и броят на уравненията в системата: например при едноточков контакт на колелата от двете колооси както е в повечето случаи, броят на уравненията и неизвестните в системата е 34. Ако се използва средния радиус на търкаляне $\mathbf{r_{mj}} = \frac{\mathbf{r_{aj}+r_{ij}}}{\mathbf{2}}$, вместо еквивалентния радиус $\mathbf{r_{ej}} = \frac{\mathbf{V}}{\omega_{\mathbf{j}}}$ и ако работата по апроксимирането на надлъжното относително плъзгане $\mathbf{u_{jx}} = \pm\left(\frac{\mathbf{s}}{\mathbf{R}}-\frac{\mathbf{\Delta r_j}}{\mathbf{r_{mj}}}\right) = \mathbf{f}(\sigma_{\mathbf{j}})$ бъде изнесена в рамките на предварителния модел, броят на уравненията и неизвестните в системата се получава 26.

Системата може да бъде значително опростена чрез линеаризиране и привеждане към условна равнина система, при което се премахват нормалните сили $\mathbf{N_{kj}}$ и ъглите на наклона $\gamma_{\mathbf{kj}}$ и се въвеждат напречни направляващи усилия в ребордите $\mathbf{Y_j}$ и вертикални натоварвания "колело-релса" $\mathbf{P_{aj}}$ и $\mathbf{P_{ij}}$, а вместо еквивалентния радиус r_{ej} се използва средният радиус. При различни подходи броят на уравненията и неизвестните може да се намали на 12 ÷ 22.

Съгласно приближените формули за относителната скорост на надлъжно плъзгане в контактни точки на външните респ. вътрешни колела може да се напише $\mathbf{u_{kjx}} = \pm\left(\frac{\mathbf{s}}{\mathbf{R}}-\frac{\mathbf{\Delta r_j}}{\mathbf{r_{mj}}}\right)$ („+" за външните колела, а знак „-" - за вътрешните), а за относителната скорост на хоризонтално-напречно плъзгане - $\mathbf{u_{kjy}} = \alpha_{\mathbf{j}}$ ($\alpha_{\mathbf{j}}\ (\mathbf{j}=\mathbf{1,2})$ - ъгъл на атака).

При предположение, че относителната скорост на плъзгане е в зоната на сухо триене (както при опростения равнинен модел) и в четири контактни точки на колелата, се предава еднакво вертикално натоварване ***П***[3]. Компонентите на силите на плъзгане $\mathbf{T_{kj}}$ в надлъжно и хоризонтално напречно направление са:

$$(45) \qquad \mathbf{T_{a1x}} = \mu.\mathbf{\Pi}.\frac{\left(\frac{\mathbf{s}}{\mathbf{R}}-\frac{\mathbf{\Delta r_1}}{\mathbf{r_{m1}}}\right)}{\sqrt{\left(\frac{\mathbf{s}}{\mathbf{R}}-\frac{\mathbf{\Delta r_1}}{\mathbf{r_{m1}}}\right)^2+\alpha_1^{\,2}}}, \qquad \mathbf{T_{a1y}} = \mu.\mathbf{\Pi}.\frac{\alpha_1}{\sqrt{\left(\frac{\mathbf{s}}{\mathbf{R}}-\frac{\mathbf{\Delta r_1}}{\mathbf{r_{m1}}}\right)^2+\alpha_1^{\,2}}}$$

$$(46) \qquad \mathbf{T_{i1x}} = \mu.\mathbf{\Pi}.\frac{\left(\frac{-\mathbf{s}}{\mathbf{R}}+\frac{\mathbf{\Delta r_1}}{\mathbf{r_{m1}}}\right)}{\sqrt{\left(\frac{-\mathbf{s}}{\mathbf{R}}+\frac{\mathbf{\Delta r_1}}{\mathbf{r_{m1}}}\right)^2+\alpha_1^{\,2}}}, \quad \mathbf{T_{i1y}} = \mu.\mathbf{\Pi}\frac{\alpha_1}{\sqrt{\left(\frac{-\mathbf{s}}{\mathbf{R}}+\frac{\mathbf{\Delta r_1}}{\mathbf{r_{m1}}}\right)^2+\alpha_1^{\,2}}}$$

$$\text{(47)} \qquad \mathbf{T_{a2x} = \mu.\Pi.\frac{\left(\frac{s}{R}-\frac{\Delta r_2}{r_{m2}}\right)}{\sqrt{\left(\frac{s}{R}-\frac{\Delta r_2}{r_{m2}}\right)^2+\alpha_2{}^2}}}, \ \mathbf{T_{a2y} = \mu.\Pi.\frac{\alpha_2}{\sqrt{\left(\frac{s}{R}-\frac{\Delta r_2}{r_{m2}}\right)^2+\alpha_2{}^2}}}$$

$$\text{(48)} \qquad \mathbf{T_{i1x} = \mu.\Pi.\frac{\left(\frac{-s}{R}+\frac{\Delta r_2}{r_{m2}}\right)}{\sqrt{\left(\frac{-s}{R}+\frac{\Delta r_2}{r_{m2}}\right)^2+\alpha_2{}^2}}}, \ \mathbf{T_{i2y} = \mu.\Pi\frac{\alpha_2}{\sqrt{\left(\frac{-s}{R}+\frac{\Delta r_2}{r_{m2}}\right)^2+\alpha_2{}^2}}}$$

При заместване в горните формули на α_1 и α_2 съответно с $\mathbf{\frac{X_1}{R}}$ и $\mathbf{\frac{X_2}{R}}$ (където X_1 и X_2 са полюсните разстояния за 1-варесп. 2-ра колооси) и при умножаване на числителя и знаменателя с $\boldsymbol{R}$, с помощта на елементарни преобразувания, на същите може да се придаде следният вид:

$$\text{(49)} \qquad \mathbf{T_{a1x} = \mu.\Pi.\frac{\left(s-R.\frac{\Delta r_1}{r_{m1}}\right)}{\sqrt{\left(s-R.\frac{\Delta r_1}{r_{m1}}\right)^2+X_1{}^2}}}, \ \mathbf{T_{a1y} = \mu.\Pi.\frac{X_1}{\sqrt{\left(s-R\frac{\Delta r_1}{r_{m1}}\right)^2+X_1{}^2}}}$$

$$\text{(50)} \qquad \mathbf{T_{i1x} = -\mu.\Pi.\frac{\left(s-R.\frac{\Delta r_1}{r_{m1}}\right)}{\sqrt{\left(s-R\frac{\Delta r_1}{r_{m1}}\right)^2+X_1{}^2}}}, \ \mathbf{T_{i1y} = \mu.\Pi\frac{X_1}{\sqrt{\left(s-R.\frac{\Delta r_1}{r_{m1}}\right)^2+X_1{}^2}}}$$

$$\text{(51)} \qquad \mathbf{T_{a2x} = \mu.\Pi.\frac{\left(s-R.\frac{\Delta r_2}{r_{m2}}\right)}{\sqrt{\left(s-R.\frac{\Delta r_2}{r_{m2}}\right)^2+X_2{}^2}}}, \ \mathbf{T_{a2y} = \mu.\Pi.\frac{X_2}{\sqrt{\left(s-R.\frac{\Delta r_2}{r_{m2}}\right)^2+X_2{}^2}}}$$

$$\text{(52)} \qquad \mathbf{T_{i1x} = -\mu.\Pi.\frac{\left(s-R\frac{\Delta r_2}{r_{m2}}\right)}{\sqrt{\left(s-R\frac{\Delta r_2}{r_{m2}}\right)^2+X_2{}^2}}}, \ \mathbf{T_{i2y} = \mu.\Pi\frac{X_2}{\sqrt{\left(s-R.\frac{\Delta r_2}{r_{m2}}\right)^2+X_2{}^2}}}$$

Получените формули за силата на плъзгане в контактните точки на колелата се различават от тези на опростения равнинен модел само с това, че навсякъде величината „*s*" е заменена с $\mathbf{\left(s-R.\frac{\Delta r_j}{r_{mj}}\right)}$. Относителната скорост на надлъжно плъзгане в контактните точки при опростения равнинен модел не съдържа компонентата $\mathbf{\frac{-\Delta r_j}{r_{mj}}}$ (от разлики между радиусите на търкаляне на двете колела на колооста), а съдържа само компонентата $\frac{\mathbf{s}}{\mathbf{R}}$ (от разликата между дължините на двете релсови нишки). Пренебрегването на компонентата $\frac{-\Delta \mathbf{r}_j}{\mathbf{r}_{mj}}$ е свързано с грешки за атакуващата колоос и особено в случаите на движение в криви със средни и големи радиуси при максимално допустими скорости.

Решаване на предварителния модел – числен пример

Определяне на координатите на контактните точки и свързаните с тях величини чрез търсене на допирни (контактни) точки между две равнини криви – на бандажния профил и на профила на релсовата глава [2],[3],[4].

Координатите $\mathbf{y}_{aj}$ и $\mathbf{y}_{ij}$ в зависимост от хлабината σ_j се определят по следните зависимости:

$$\textbf{(53)}\qquad \mathbf{y}_{aj} = \begin{cases} \mathbf{-0,75531 - 0,4521.\sigma_j \;\; при \;\; 0,011m < \sigma_j \le 0,015m} \\ \mathbf{-0,71821 - 1,2.\sigma_j \;\; при \;\; 0,0025m < \sigma_j \le 0,011m} \\ \mathbf{-0,71526 - 2,6.\sigma_j \;\; при \;\; -0,0015m \le \sigma_j \le 0,0025m} \end{cases}$$

$$\textbf{(54)}\qquad \mathbf{y}_{ij} = \begin{cases} \mathbf{0,768875531 - 0,4521.\sigma_j \;\; при \;\; 0,005m < \sigma_j \le 0,015m} \\ \mathbf{0,76965 - 0,44.\sigma_j \;\; при \;\; -0,0015m \le \sigma_j \le 0,005m} \end{cases}$$

На фиг.2.5а и фиг.2.5б. са представени графиките на координатите $\mathbf{y}_{aj}$ и $\mathbf{y}_{ij}$ в зависимост от хлабината σ_j, при следните данни:

- вагонна колоос:

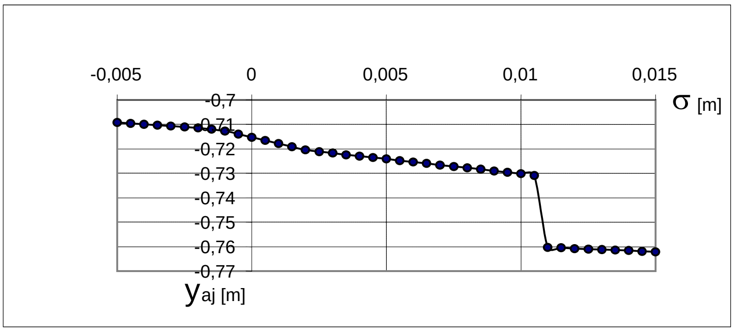
диаметър ***920 mm*** и унифициран бандажен профил по UIC – нов

- релси:

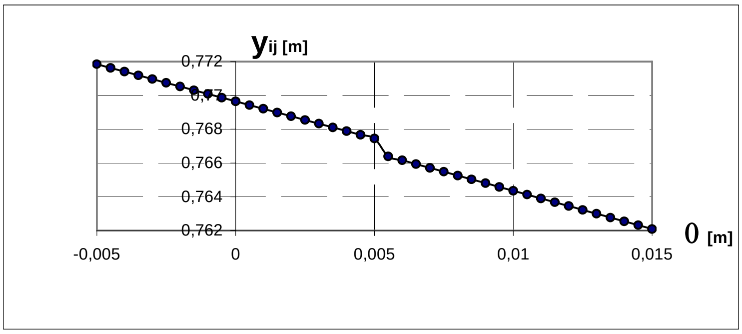
- радиус на средната част на главата ***400mm***,
- радиус на закръглението при вътрешния ръб ***8mm***,
- разположени с наклон ***1/40*** навътре при уширение в крива ***15mm***,
- общо износване 6mm или хлабина “реборд-релса”:

$\mathbf{\Delta = 1435 - 1426 + 15 + 6 = 30mm}$.

Получава се двуточков контакт на релсите (едноточков „колело-релса”).



фиг.2.5а. Графика на координатите $\mathbf{y}_{aj}$ в зависимост от хлабината σ_j



фиг.2.5б. Графика на координатите y_{ij} в зависимост от хлабината

Зависимостите между радиуса на контактната точка и напречната координата т.е. $r_{aj} = r_{aj}(y_{aj})$, $r_{ij} = r_{ij}(y_{ij})$ се определят непосредствено в аналитична форма от зададения бандажен профил, съставен в контактната част от дъги от окръжности и при начални условия $r_{aj} = 0,46m$ (при $y_{aj} = -0,75m$), и $r_{ij} = 0,46m$ (при $y_{ij} = 0,75m$) имат следния вид:

$$\textbf{(55)} \quad r_{aj} = \begin{cases} 0,12989 + \sqrt{0,33^2 - (y_{aj} + 0,75825)^2} & \text{при } y_{aj} \le -0,76051m \\ 6,5.y_{aj}^2 + 9,672.y_{aj} + 4.058287 & \text{при } -0,76051m < y_{aj} < -0,72233m \\ 0,475947 - \sqrt{0,013^2 - (y_{aj} + 0,725366)^2} & \text{при } y_{aj} \ge -0,72233m \end{cases}$$

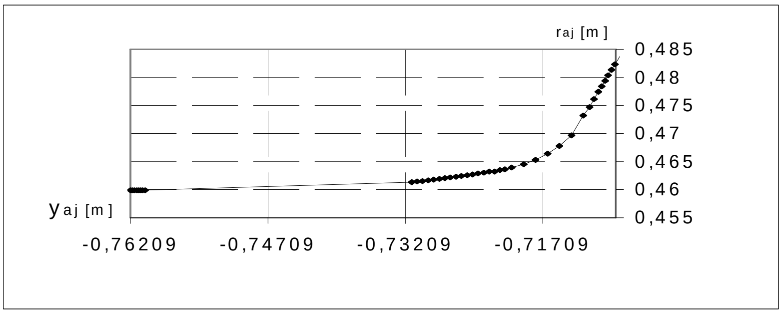
$$\textbf{(56)} \quad r_{ij} = 0,12989 + \sqrt{0,33^2 - (y_{ij} - 0,75825)^2} \quad \text{при } 0,76209m \le y_{ij} \le 0,77059m$$

На базата на тези зависимости чрез диференциране се определят и зависимостите на тангенса на ъгъла на наклона γ_{aj} и γ_{ij} от координатите на контактните точки y_{aj} съответно y_{ij} т.е. зависимостите $\gamma_{aj} = f_1'(y_{aj})$ и $\gamma_{ij} = f_2'(y_{ij})$, които за зададения профил UIC имат вида:

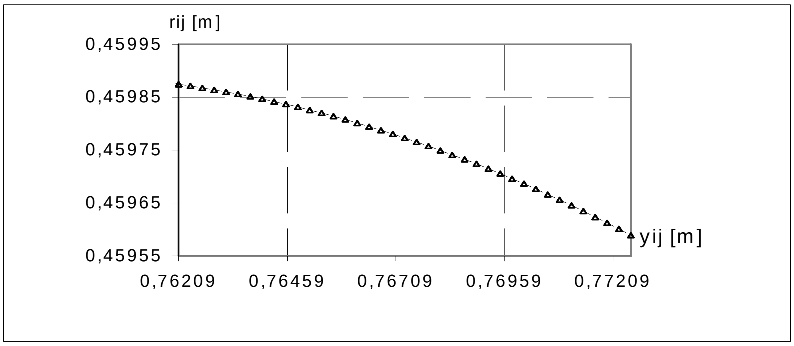
$$\textbf{(57)} \quad \gamma_{aj} = \begin{cases} \operatorname{arctg}\left\{ \dfrac{-(y_{aj} + 0,75825)}{\sqrt{0,33^2 - (y_{aj} + 0,75825)^2}} \right\} & \text{при } y_{aj} \le -0,76051m \\ \operatorname{arctg}\left\{ \dfrac{(y_{aj} + 0,744)}{\sqrt{0,08^2 - (y_{aj} + 0,744)^2}} \right\} & \text{при } -0,76051m < y_{aj} < -0,72233m \\ \operatorname{arctg}\left\{ \dfrac{(y_{aj} + 0,724575)}{\sqrt{0,013^2 - (y_{aj} + 0,724575)^2}} \right\} & \text{при } y_{aj} \ge -0,72233m \end{cases}$$

$$\textbf{(58)} \quad \gamma_{ij} = \left\{ \operatorname{arctg}\left\{ \dfrac{-(y_{ij} - 0,75825)}{\sqrt{0,33^2 - (y_{ij} - 0,75825)^2}} \right\} \quad \text{при } 0,76209m \le y_{ij} \le 0,77059m \right.$$

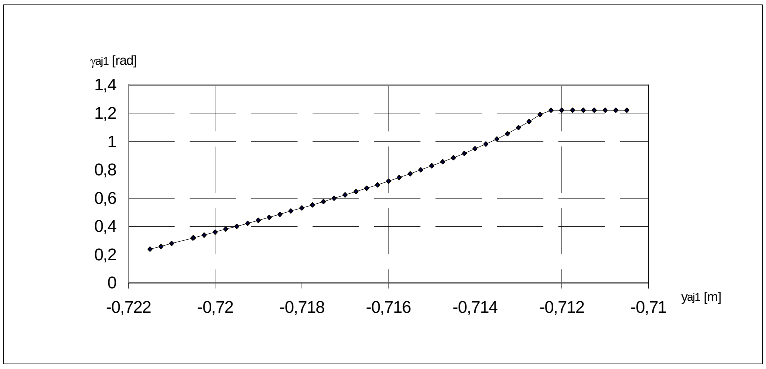
На фиг.2.6а и фиг.2.6б са представени графиките за радиуса $\mathbf{r_{aj}} = \mathbf{r_{aj}}\left(\mathbf{y_{aj}}\right)$ и $\mathbf{r_{ij}} = \mathbf{r_{ij}}\left(\mathbf{y_{ij}}\right)$, а на фиг.2.7а и фиг.2.7б ъгъла на наклона $\gamma_{aj} = \gamma_{aj}\left(\mathbf{y_{aj}}\right)$ и $\gamma_{ij} = \gamma_{ij}\left(\mathbf{y_{ij}}\right)$ на контактните точки за външното и вътрешно колела при данните от горния пример.



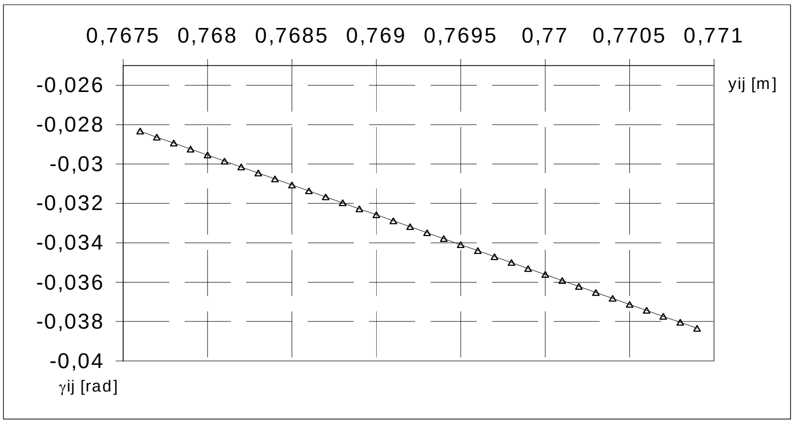
фиг.2.6а. Графика на радиусите $\mathbf{r_{aj}}$ в зависимост от координатата $\mathbf{y_{aj}}$



фиг.2.6.б. Графика на радиусите $\mathbf{r_{ij}}$ в зависимост от координатата $\mathbf{y_{ij}}$



фиг.2.7а. Графика на ъгъла на наклона γ_{aj} в зависимост от координатата $\mathbf{y_{aj}}$



фиг.2.7б. Графика на ъгъла на наклона γ_{ij} в зависимост от координатата y_{ij}

Заключение

1. Съставена е система от 40 уравнения, от които 18 - произтичат от статическите условия за равновесие на двете колооси и рамата; 4 уравнения - от разположението в крива на талигата заедно с колоосите и рамата при отчитане на техните взаимни хоризонтални премествания и напречните деформации на релсата; 6 уравнения, изразяващи главната координата „y” на контактните точки в зависимост от координатата $\boldsymbol{\sigma}_j$ при $\boldsymbol{\alpha}_j = \mathbf{0}$ и 12 уравнения, за геометрично – кинематичните параметри $\mathbf{r}_{kj}$ и γ_{kj} в контактните точки във функция от координатите $\mathbf{y}_{kj}$

2. Създаден и използван е опростен равнинен модел с повишена точност, чрез въвеждането на коригиращ фактор $-\mathbf{R}.\dfrac{\Delta\mathbf{r}_j}{\mathbf{r}_{mj}}$ (вместо величината „*s*” се използва $\left(\mathbf{s} - \mathbf{R}.\dfrac{\Delta\mathbf{r}_j}{\mathbf{r}_{mj}}\right)$.)

3. Съставен е спомагателен модел, чрез който са определени координатите на контактните точки и свързаните с тях величини чрез търсене на допирни (контактни) точки между две равнини криви – на бандажния профил и на профила на релсовата глава.

Литература

[1] Стоянов В., Метод на квазистатично вписване на двуосна железопътна талига в крива, сп. Механика, транспорт, комуникации, №1, 2009, BG ÷BG .

[2] АТМАДЖОВА, Д. Метод за определяне на характеристиките на буксовите връзки с рамата на талига за пътнически вагони, Дис., С., 2001

[3] Атмаджова Д. *Модели за изследване ходовата част на железопътен подвижен състав при движението му в крив участък от пътя.* София, Електронно списание “Механика Транспорт Комуникации“ бр. 1, 2007, BG ÷BG

[4] Атмаджова Д. Изследвания на рециклирани пътнически вагони. София, XIII НК с международно участие на ВТУ “Т. Каблешков”, 2003, с. 197-203