

## **МЕТОД ЗА КВАЗИСТАТИЧНО ВПИСВАНЕ НА ДВУОСНА ЖЕЛЕЗОПЪТНА ТАЛИГА В КРИВА**

**Веселин Емилов Стоянов**

[ves@vtu.bg](mailto:ves@vtu.bg)

**ВТУ „Тодор Каблешков”  
София 1574, ул. „Гео Милев” 154, България**

*Ключови думи:* железопътна талига, модел, квазистатично вписване в крива

*Резюме:* Проведено е изследване и е предложен теоретичен метод за квазистатично вписване при установено движение в крива на железопътен двуосен екипаж за най-общия случай на свободно установяеми еластично свързани с рамата колооси в хоризонтално направление. Задачата за квазистатично вписване на талига в крива е решена чрез координатите на контактните точки на колелата с релсите, като от тях са определени параметрите: радиуси на търкаляне, наклони, кривини и свързаните с тях размери и форма на контактните петна; скоростите на приплъзване между колелата и релсите; силовото взаимодействие между тях; кинематиката на процеса на износване и др.

### **Въведение**

Класически и най-широко използван модел на квазистатично вписване в крива на ходовата част на железопътните возила, е така наречения опростен равнинен модел [6,7,8,9]. Той адекватно отразява действителните експлоатационни условия при движение в крива и същевременно е сравнително прост и лесно достъпен. Методът не отчита относителното плъзгане „колело-релса” в надлъжно направление, породено от разликата между дължините на външната и вътрешна релса, както и между диаметрите на търкаляне на външното и вътрешно колело, което води до увеличаване на направляващите сили до достигане на пределната им стойност за атакуващата колоос. Не се отчитат и хоризонталните премествания на колоосите спрямо рамата на талигата, както и обусловените от тях изменения на ъгъла на атака. Моделът е неизползваем при малки стойности на същия този ъгъл, поради което не може да се прилага при съвременните вагони, притежаващи ходова част със свободно установяеми и принудително направлявани колооси.

Основния фактор при проведените изследвания както в квазистатичен - [1] и [2], така и в динамичен режим - [5,10,11] е колооста, разглеждана като елемент

за направляване на екипажа, който се намира в условия на сложно взаимодействие с релсите и талигата поради неконсервативните сили на крипа (респ. сухото триене) от една страна и от друга – силите, предавани от коша на возилото и тези, формирани в талигата и колоосите.

В повечето от посочените изследвания чрез итерации се решава задачата за целия екипаж, като основните фактори за направляващите функции, експлоатационните качества и безопасността – ъгълът на атака и хоризонталните премествания на буксите спрямо рамата – остават между величините, на които се задават последователно различни стойности и решенията се повтарят докато се установи практически приемлива сходимост на резултатите. По-голям интерес представляват изследванията, където за решаване на проблема се подхожда изключително строго при най-обобщена постановка с използване на пространствен модел, като за групата величини, представляващи координатите на контактните точки и непосредствено свързаните с тях параметри, теоретично се получават резултати, които са изключително точни. В същност тази оценка (за изключителната точност на резултатите) важи при положение, че произволно зададените стойности на ъгъла на атака и на другите величини от втората група съвпадат със стойностите, получени от решенията, но това на практика не се потвърждава, защото всички неизвестни величини се определят по итеративен път; при това трудностите нарастват неимоверно, когато величините със задавани и подлежащи на уточняване стойности са повече от една.

Основната цел в настоящия труд е да се направят сравнителен анализ, оценка и избор на теоретичен метод за квазистатично вписване с установено движение в крива на железопътен двусен екипаж (талига) за най-общия случай на свободно установяеми, еластично свързани с рамата колооси в хоризонтално направление, характеризиращ се с пряко, еднозначно и достатъчно точно определяне на ъгъла на атака, хоризонталните премествания на буксите спрямо рамата, напречните хлабини между ребордите на колоосите и релсите, както и на всички геометрични и силови параметри, определящи разположението на екипажа с неговите елементи и силовото взаимодействие в системата.

### **Избор на метод**

Основното първоначално предположение, върху което се разработва предложеният метод е, че местоположението (координатите) на контактните точки между колелата и релсите и свързаните с тях параметри (радиуси на търкаляне, наклони и кривини) не зависят от ъгъла на атака; като при тази предпоставка се допускат грешки най-напред в местоположението (координатите) на контактните точки:

- за повърхнината на търкаляне на бандажния профил “изместванията” по направление на оста на колооста имат стойности под 0,001mm;

- за зоната на реборда при ъгъл на наклона  $\gamma \approx 70^\circ$  - под 0,07mm, а при пределно допустимия наклон  $\gamma \approx 79^\circ$  - под 0,12 mm.

Тези грешки не се отразяват съществено върху крайните резултати. Въведеното предположение дава възможност при нулева стойност на ъгъла на атака в изразите за координатите на контактните точки и непосредствено свързаните с тях параметри да се избегнат извънредно големите усложнения,

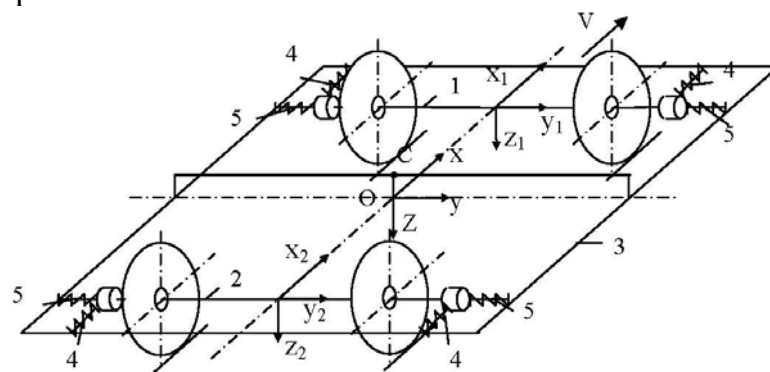
правещи проблематично решаването на задачата, като в същото време съвсем целесъобразно ъгълът на атака се въвежда като неизвестна величина там, където неговото отчитане е от съществено значение (в уравненията с напречни сили на крипа; в уравненията за отразяване на разположението в крива на екипажа с неговите елементи).

Методът със същите предпоставки и същия подход за решаване е приложим и за екипажи с повече колооси, в т.ч. и съставни екипажи, но тук ще бъде сведен до най-масово използван двуосен екипаж (талига) с конвенционални колооси, който се разглежда като механична система, съставена от три тела – рама плюс две колооси, свързани чрез буксите еластично с нея в хоризонтално - напречно и - надлъжно направление. Тази система може да се приеме като най-общ случай на следните алтернативни системи:

- с твърдо свързани към рамата колооси (букси) в хоризонтално направление (едносъставна система);
- с еластично свързани с рамата колооси само в напречно или надлъжно направление;
- с твърдо хоризонтално свързване с рамата само на едната колоос (двусъставна система);
- с принудително направлявани колооси.

### Описание на модела

Разглежда се двуосен екипаж в режим на квазистатично вписване при установено движение в крива, представен като механична система (фиг.1), състояща се от три тела: първа колоос 1 (съобразно посоката на движение), втора колоос 2 и рама 3. Колоосите са свързани с рамата в хоризонтално надлъжно и напречно направление чрез еластични буксови връзки 4 и 5 в средите на буксите в хоризонталната равнина.



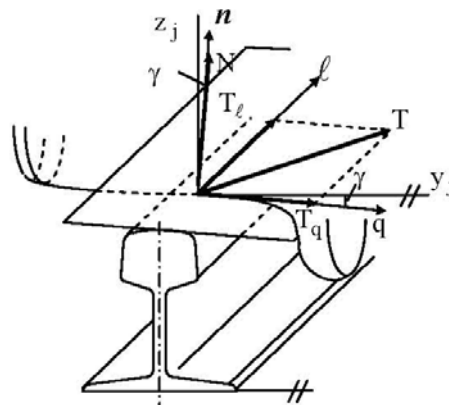
фиг.1 Общ вид на елементите на талигата

Координатната система за рамата е с координатни оси  $x, y, z$ , за първа колоос -  $x_1, y_1, z_1$  и за втора колоос -  $x_2, y_2, z_2$ , като началото на всяка координатна система ( $O, O_1, O_2$ ) съвпада с геометричния център на съответното тяло.

Специално за контактните точки на колелата с релсите освен описаната координатна система ще бъде използвана координатна система, имаща за начало

съответната контактна точка и координатни оси  $\ell, q, n$  (със съответните индекси) (фиг.2), както следва:

- надлъжна (екваториална) ос  $\ell$ , разположена в допирателната към контактната точка равнина и насочена по посока на въртенето на колелото в поглед отгоре;
- напречна (меридианна) ос  $q$ , разположена в същата допирателна равнина по тангентата към съответния меридиан и насочена на дясно (при обръщане с лице по посока на движението);
- нормална ос  $n$ , съвпадаща с нормалата към повърхнината на колелото и релсата в контактната точка, насочена “навън” от релсата.

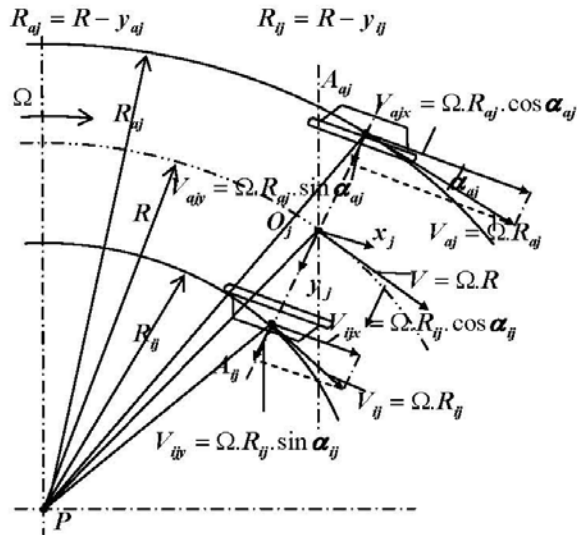


фиг.2 Координатна система с оси  $\ell, q$  и  $n$  и компоненти на тангенциалната сила от плъзгане

Всички величини отнесени до първа или втора колоос имат индекс „j”. Левите колела (гледано по посока на движението) и съответно левите букси, релси и т.н. са приети за външни по отношение на кривата (завиваща надясно), а десните колела, букси, релса и т.н. - за вътрешни. Всички величини, отнасящи се за външни елементи имат буквен индекс „a” и съответно „i” за вътрешни, написан преди цифровия индекс „j”. За параметрите на контактните точки от зоната на реборда на външното или вътрешно колело е използван индекс „ar” съответно „ir”.

### Основни зависимости за процесите в контактните точки между колелата и релсите

За характерните процеси в контактните точки „колело-релса”, основните зависимости по отношение на скоростите на плъзгане и породените от тях тангенциални сили за колела, свързани твърдо в колоос, се определят съгласно фиг.3.



фиг.3 Движение на колоос „j” като елемент от железопътен екипаж в крива

В показаната крива с радиус  $R$  движението на разглежданата колоос заедно с целия екипаж може да се представи като завъртане около центъра на кривата  $P$  с ъглова скорост  $\Omega$ , а скоростта  $V$  на движение на екипажа, отнасяща се за центъра на колооста  $O_j$  - с израза:

$$(1) \quad V = \Omega \cdot R$$

Преносната скорост на контактните точки  $A_{aj}$  и  $A_{ij}$  с напречни координати  $y_{aj}$  и  $y_{ij}$ , за съответното колело, е:

- за външно колело:

$$(2) \quad V_{aj} = \Omega \cdot (R - y_{aj}), \quad y_{aj} < 0$$

- за вътрешно колело:

$$(3) \quad V_{ij} = \Omega \cdot (R - y_{ij}), \quad y_{ij} > 0$$

или обобщено:

$$(4) \quad V_{kj} = \Omega \cdot (R - y_{kj}), \quad (k = a, ar, i), \quad (j = 1, 2)$$

Компонентите  $V_{kix}$  и  $V_{kij}$  на преносната скорост  $V_{kj}$  в контактните точки, съответно по осите  $x_j$  и  $y_j$  са:

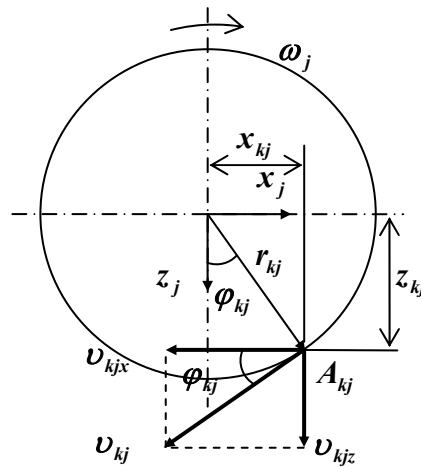
$$(5) \quad V_{kix} = V_{kj} \cdot \cos \alpha_j,$$

$$(6) \quad V_{kij} = V_{kj} \cdot \sin \alpha_j, \quad (k = a, ar, i), \quad (j = 1, 2),$$

където:  $\alpha_j$  е ъгълът на атака между колелото и релсата за  $j$ -та колоос, дефиниран като ъгъл между равнината на външното колело и тангентата към релсата в точката на контакта или също така като ъгъл между вертикалната равнина през оста на колооста и радиус вектора на кривата за съответната контактна точка.

Абсолютната скорост на плъзгане в надлъжно направление по ос  $x_j$ , обозначена с  $U_{kix}$ , се дефинира като сума от проекциите по същата ос на

преносната скорост  $V_{kj}$  и относителната скорост  $U_{kj}$  на контактната точка. Ако разгледаме фиг.1.4, можем да запишем следните изрази за  $U_{kj}$ :



фиг.4 Кинематична зависимост на надлъжната компонента на относителната скорост на контактната точка

$$(7) \quad U_{k_jx} = -\omega_j \cdot r_{kj} \cdot \cos \varphi_{kj} = -\omega_j \cdot r_{kj} \cdot \frac{z_{kj}}{r_{kj}} = -\omega_j \cdot z_{kj}$$

$$(8) \quad U_{k_jz} = \omega_j \cdot r_{kj} \cdot \sin \varphi_{kj} = \omega_j \cdot r_{kj} \cdot \frac{x_{kj}}{r_{kj}} = \omega_j \cdot x_{kj}$$

$$(9) \quad U_{kj} = \omega_j \cdot r_{kj}$$

Тогава, използвайки 7, за абсолютната скорост на плъзгане в по ос „x” получаваме:

$$(10) \quad U_{k_jx} = V_{kj} \cdot \cos \alpha_j - \omega_j \cdot z_{kj}, \quad (k = a, ar, i), \quad (j = 1, 2)$$

където:  $\omega_j$  е ъгловата скорост на колооста, а  $z_{kj}$  - вертикалната координата на контактната точка  $A_{kj}$ .

За израза (10), използвайки (1), (2) и (3) и се положи  $\cos \alpha_j = 1$ , се получава абсолютната скорост на плъзгане в надлъжно направление за отделните контактни точки:

$$(11) \quad U_{a_jx} = V \cdot \left(1 - \frac{y_{aj}}{R}\right) - \omega_j \cdot z_{aj}, \quad (y_{aj} < 0),$$

$$(12) \quad U_{i_jx} = V \cdot \left(1 - \frac{y_{ij}}{R}\right) - \omega_j \cdot z_{ij}, \quad (y_{ij} > 0),$$

$$(13) \quad U_{ar_jx} = V \cdot \left(1 - \frac{y_{arj}}{R}\right) - \omega_j \cdot z_{arj}, \quad (y_{arj} < 0)$$

Относителната скорост на плъзгане в надлъжно направление  $u_{kix}$ , дефинирана като съотношение между абсолютната скорост на плъзгане и скоростта на движение, т.е.  $u_{kix} = \frac{U_{kix}}{V}$ , за различните контактни точки е:

- за външно колело в повърхността на търкаляне:

$$(14) \quad u_{ajx} = 1 - \frac{y_{aj}}{R} - \frac{\omega_j \cdot z_{aj}}{V}$$

- за вътрешно колело в повърхността на търкаляне:

$$(15) \quad u_{ijx} = 1 - \frac{y_{ij}}{R} - \frac{\omega_j \cdot z_{ij}}{V}$$

за външно колело в повърхността на реборда:

$$(16) \quad u_{arjx} = 1 - \frac{y_{arj}}{R} - \frac{\omega_j \cdot z_{arj}}{V}, \quad (j=1,2)$$

Ако се разгледа само повърхността на търкаляне от бандажния профил на колелата и се замести вертикалната координата  $z_{kj}$  с фактическият радиус на търкаляне  $r_{kj}$ , т.е.  $z_{aj} = r_{aj}$  и  $z_{ij} = r_{ij}$ , се получава:

- за външно колело:

$$(17) \quad u_{ajx} = 1 - \frac{y_{aj}}{R} - \frac{\omega_j \cdot r_{aj}}{V},$$

- за вътрешно колело:

$$(18) \quad u_{ijx} = 1 - \frac{y_{ij}}{R} - \frac{\omega_j \cdot r_{ij}}{V}, \quad (j=1,2),$$

След преобразуване се получава:

$$(19) \quad \frac{V}{\omega_j} = r_{ej}$$

където:  $r_{ej}$  може да се нарече *еквивалентен радиус* на търкаляне на разглежданата колоос под номер „ $j$ “. След въвеждане на разликите между радиусите  $\Delta r_{aj} > 0$  и  $\Delta r_{ij} > 0$ , а именно:

$$(20) \quad \Delta r_{aj} = r_{aj} - r_{ej}; \quad \Delta r_{ij} = r_{ej} - r_{ij}$$

се получава:

- за външно колело:

$$(21) \quad u_{ajx} = 1 - \frac{y_{aj}}{R} - \frac{r_{aj}}{r_{ej}} \quad \text{или} \quad u_{ajx} = -\frac{y_{aj}}{R} - \frac{\Delta r_{aj}}{r_{ej}} \quad (y_{aj} < 0)$$

- за вътрешно колело:

$$(22) \quad u_{ijx} = 1 - \frac{y_{ij}}{R} - \frac{r_{ij}}{r_{ej}} \quad \text{или} \quad u_{ijx} = -\frac{y_{ij}}{R} + \frac{\Delta r_{ij}}{r_{ej}} \quad (y_{ij} > 0)$$

След опростяване (еквивалентният радиус за коя да е колоос  $r_{ej}$  се заменя със *среден* радиус на търкаляне  $r_{mj}$ , определен като средноаритметична величина между  $r_{aj}$  и  $r_{ij}$ ):

$$(23) \quad r_{mj} = \frac{r_{aj} + r_{ij}}{2}, \quad \text{при което:}$$

$$(24) \quad \frac{r_{aj} - r_{ij}}{2} = \Delta r_j, \quad r_{aj} = r_{mj} + \Delta r_j, \quad r_{ij} = r_{mj} - \Delta r_j$$

Изразите (21) и (22) се преобразуват във вида:

$$(25) \quad u_{ajx} \approx \frac{s}{R} - \frac{\Delta r_j}{r_{mj}}$$

$$(26) \quad u_{ijx} \approx -\frac{s}{R} + \frac{\Delta r_j}{r_{mj}}$$

където:  $s = |y_{kj}|$  за окръжността на търкаляне на бандажния профил.

Въз основа на анализ на горните изрази (21÷26), може да се отбележи, че:

- първата компонента на относителното надлъжно плъзгане е постоянна за дадена крива, докато втората се променя в зависимост от установилите се в квазистатичния процес реални радиуси  $r_a$  и  $r_i$  на търкаляне на колелата, като при  $\frac{\Delta r_j}{r_{mj}} \approx \frac{s}{R}$  или  $\frac{\Delta r_j}{s} \approx \frac{r_{mj}}{R}$  надлъжното преплъзване се анулира и

при по-нататъшно нарастване на разликата между радиусите се променя знакът (посоката) на скоростта на относителното надлъжно преплъзване;

- в първо приближение може да се приеме, че това преплъзване има еднакви стойности с противоположни знаци (посоки) или отношението за двете колела на колооста е:

$$(27) \quad \frac{u_{ajx}}{u_{ijx}} \approx -1$$

Абсолютната скорост на плъзгане в хоризонталната равнина по ос  $y$  (фиг.3)  $U_{kly}$  (по отделно за контактните точки на външното и вътрешното колело) е равна на сумата от напречната хоризонтална компонента на преносната скорост  $\Omega \cdot R_{kj} \cdot \sin \alpha_{kj}$  и напречната хоризонтална компонента на относителната скорост (в случая равна на нула):

$$(28) \quad U_{kly} = \Omega \cdot R_{kj} \cdot \sin \alpha_{kj} = \frac{V}{R} (R - y_{kj}) \cdot \sin \alpha_{kj} = V \cdot \left(1 - \frac{y_{kj}}{R}\right) \cdot \alpha_{kj},$$

където  $\sin \alpha_{kj} = \alpha_{kj}$  (поради малката стойност на ъгъл  $\alpha_{kj}$ ).

Относителната скорост на плъзгане в напречно-хоризонтално направление  $u_{kly} = \frac{U_{kly}}{V}$  може да се запише в обобщен вид:

$$(29) \quad u_{kly} = \left(1 - \frac{y_{kj}}{R}\right) \cdot \alpha_{kj},$$

или, поотделно –  
за външното колело –

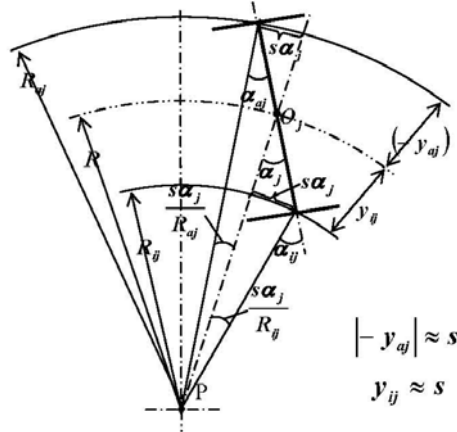
$$(30) \quad u_{ajy} = \left(1 - \frac{y_{aj}}{R}\right) \cdot \alpha_{aj} \approx \left(1 + \frac{s}{R}\right) \cdot \alpha_{aj}$$

за вътрешното колело –



$$(31) \quad \mathbf{u}_{ijy} = \left(1 - \frac{y_{ij}}{R}\right) \cdot \alpha_{ij} \approx \left(1 - \frac{s}{R}\right) \cdot \alpha_{ij}$$

От фиг.5 се вижда, че ъглите на атака  $\alpha_{aj}$  и  $\alpha_{ij}$  могат да се изразят чрез ъгъла на атака на колооста  $\alpha_j$ , заемащ някаква средна стойност между тях и дефиниран като ъгъл, сключен между оста на колооста и радиус вектора  $\overline{PO}_j = R$  към средната ѝ точка  $O_j$ , съвпадаща с началото на координатната система.



фиг.5 Еднаквост на напречно-горизонталното приплъзване на двете колела

За съответните контактни точки  $R_{aj}$  и  $R_{ij}$  се получават следните геометрични зависимости:

$$(32) \quad \alpha_{aj} = \alpha_j - \frac{s \cdot \alpha_j}{R_{aj}} = \left(1 - \frac{s}{R_{aj}}\right) \cdot \alpha_j \quad \text{и}$$

$$(33) \quad \alpha_{ij} = \alpha_j + \frac{s \cdot \alpha_j}{R_{ij}} = \left(1 + \frac{s}{R_{ij}}\right) \cdot \alpha_j,$$

след заместване в горните изрази се получава:

$$(34) \quad \mathbf{u}_{ajy} = \left(1 + \frac{s}{R}\right) \cdot \left(1 - \frac{s}{R_{aj}}\right) \cdot \alpha_j = \frac{(R+s) \cdot (R_{aj}-s)}{R \cdot R_{aj}} \cdot \alpha_j$$

$$(35) \quad \mathbf{u}_{ijy} = \left(1 - \frac{s}{R}\right) \cdot \left(1 + \frac{s}{R_{ij}}\right) \cdot \alpha_j = \frac{(R-s) \cdot (R_{ij}+s)}{R \cdot R_{ij}} \cdot \alpha_j$$

Дробните изрази пред  $\alpha_j$  (след развиването им) са равни на единица, следователно относителната скорост на плъзгане в напречно-горизонтално направление на двете колела на колооста е еднаква и се равнява на ъгъла на атака за съответната колоос, т.е.:

$$(36) \quad \mathbf{u}_{ajy} = \mathbf{u}_{ijy} = \alpha_j$$

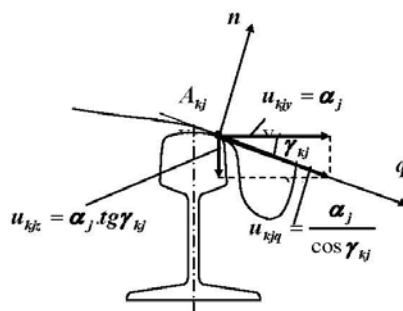
Тъй като процесът на напречно плъзгане, обусловено от ъгъла на атака  $\alpha_j$ , всъщност протича в наклонената под ъгъл  $\gamma_{kj}$  повърхнина на бандажния профил в точката на контакта „колело-релса”, то относителната скорост на плъзгане в

тази равнина по оста  $q$  (фиг.1.6) е означена с  $u_{kjq}$  и се нарича относителна скорост на плъзгане в напречно направление:

$$(37) \quad u_{kjq} = \frac{u_{kjqy}}{\cos \gamma_{aj}} = \frac{\alpha_j}{\cos \gamma_{aj}}$$

Хоризонталната ѝ компонента е разгледаната по-горе като относителна скорост на плъзгане в напречно – хоризонтално направление  $u_{kjq} = \alpha_j$  (1.37), а вертикалната компонента – относителната скорост на плъзгане във вертикално направление  $u_{kjqz}$ :

$$(38) \quad u_{kjqz} = \alpha_j \cdot \operatorname{tg} \gamma_{kj}$$



фиг.6 Относителна скорост на напречно плъзгане  $u_{kjq}$  и нейните компоненти по осите  $y$  и  $z$

Относителната скорост на плъзгане във вертикално направление, съгласно фиг.4 се определя от израза:

$$(39) \quad u_{kjqz} = \frac{\omega_j}{V} \cdot r_{kj} \cdot \alpha_j \cdot \operatorname{tg} \gamma_{kj} = \frac{1}{\omega_j} \cdot r_{kj} \cdot \alpha_j \cdot \operatorname{tg} \gamma_{kj} = \frac{r_{kj}}{r_{ej}} \cdot \alpha_j \cdot \operatorname{tg} \gamma_{kj} \approx \alpha_j \cdot \operatorname{tg} \gamma_{kj}$$

Абсолютната стойност на относителната скорост на плъзгане  $|u_{kj}|$  в която и да е контактна точка може да се определи в най-общия случай от 3-те компоненти  $u_{kjqx}$ ,  $u_{kjqy}$  и  $u_{kjqz}$ :

$$(40) \quad |u_{kj}| = \sqrt{u_{kjqx}^2 + u_{kjqy}^2 + u_{kjqz}^2} = \sqrt{\left(1 - \frac{y_{kj}}{R} - \frac{r_{kj}}{r_{ej}}\right)^2 + \alpha_j^2 \cdot (1 + \operatorname{tg}^2 \gamma_{kj})}$$

или, при използване на координатна система с оси  $\ell$ ,  $q$  и  $n$  - от двете компоненти  $u_{kjq\ell}$  и  $u_{kjq}$ , т.е.

$$(41) \quad |u_{kj}| = \sqrt{u_{kjq\ell}^2 + u_{kjq}^2} = \sqrt{\left(1 - \frac{y_{kj}}{R} - \frac{r_{kj}}{r_{ej}}\right)^2 + \frac{\alpha_j^2}{\cos^2 \gamma_{kj}}}$$

където:

$$(42) \quad u_{kjq}^2 = u_{kjqy}^2 + u_{kjqz}^2$$

### Тангенциална сила в контактните точки “колело - релса”

Определяне на тангенциалната сила в контактната точка между колелото и релсата при относително им преместване с плъзгане, изразявайки

компонентите  $T_1$  и  $T_2$  на силата на триене  $T$  в две взаимно перпендикулярни направления, чрез съставните на скоростта на относително плъзгане  $U_1$  и  $U_2$  се изразява както следва:

$$(43) \quad T_1 = T \cdot \frac{U_1}{\sqrt{U_1^2 + U_2^2}} \quad \text{и} \quad T_2 = T \cdot \frac{U_2}{\sqrt{U_1^2 + U_2^2}}$$

където:  $T = f \cdot P$ ,  $P$ - сила, предавана от колелото върху релсата;  $f$ - коефициент на триене между колелото и релсата.

Преплъзването между колело и релса е съпроводено с появата на тангенциални сили и деформации на материала, но без за се преодолява силата на сцепление. Силите имат еластичен характер и не достигат размера на силите при сухо триене. Това относително преместване вследствие еластичността на материала е наречено “псевдоплъзгане” или “крип” и тангенциалните сили при него се определят от израза:

$$(44) \quad T = -K \frac{U}{V} = -K \cdot u$$

където:  $K$  - коефициент на крипа;  $U$  – абсолютна скорост на плъзгане;  $u$  – относителна скорост на плъзгане;  $V$  - скорост на движение.

Коефициентът на крипа в kN се определя по следната зависимост:

$$(45) \quad K = 800 \sqrt{10 \cdot P \cdot r}$$

където:  $P$  - натоварване на колелото, kN;  $r$  - радиус на колелото, m.

Явлението псевдоплъзгане (крип) съществува при относителна скорост на плъзгане под критичната  $u_{кр}$ . Над тази скорост плъзгането е подчинено на Закона за сухо триене.

За всички съществуващи хипотези и методи за определяне на тангенциалната сила  $T_{kj}$  в зоната на контакт е характерно, че зависимостите се изразяват в две зони – на псевдоплъзгането и на сухото триене. Това налага работа с прекъснати функции и предизвиква неудобства, като се има предвид, че най-често процесите на приплъзване протичат около или в преходния участък между двете зони.

Изложеният недостатък може да се отстрани, ако функционалната зависимост  $\tilde{T} = \tilde{T}(\tilde{u})$  се апроксимира като непрекъсната функция за двете споменати зони[2]. Такава функция може да бъде от вида:

$$(46) \quad \tilde{T}_{kj} = -a \cdot \tanh(b \cdot \tilde{u}_{kj}),$$

В този вид тя става действително непрекъсната и сравнително добре съответстваща на характера на действителната зависимост (леко регресивна) – видно от резултатите на различни изследвания. На базата на тези резултати се определят коефициентите  $a$  и  $b$  в общата формула при апроксимирането ѝ за различните случаи[5],[6]. Зависимостта (46) може да се апроксимира в конкретизиран вид:

$$(47) \quad |T_{kj}| = -f \cdot N \cdot \tanh(1000 \cdot |u_{kj}|) \quad \text{- параболчна хипотеза на Carter}$$

$$(48) \quad |T_{kj}| = -f \cdot N \cdot \tanh(1200 \cdot |u_{kj}|) \quad \text{- хипотеза на Daiwis}$$

$$(49) \quad |T_{kj}| = -f \cdot N \cdot \tanh(2,727 \cdot \tau) \quad \text{- хипотеза на Kalker}$$

$$(50) \quad |T_{kj}| = -f \cdot N \cdot \tanh(3,333 \cdot \tau) - \text{хипотеза на Johnson – Vermeulen}$$

Уравненията на цилиндричните повърхнини от релсата, на която лежат контактните точки, изведени в [11], в координатната система  $O_{xyz}$ , имат вида:

$$(51) \quad \Phi_1(x, y, z) = [-x \cdot \sin \alpha + z \cdot \cos \alpha - z_{12} + t - \\ - H \cdot \sin \alpha - \frac{R-r}{H} (z_{14} - z_{12} - H \cdot \sin \alpha) \cdot \cos \delta - (R-r) \sin \delta - (R-r) \sin \delta]^2 + \\ + \left[ y - y_{12} - (R-r) \cos \delta + \frac{R-r}{H} (z_{14} - z_{12} - H \cdot \sin \alpha) \cdot \sin \delta \right]^2 - r^2 = 0$$

$$(52) \quad \Phi_2(x, y, z) = (-x \cdot \sin \alpha + z \cdot \cos \alpha - z_{12} + t - H \cdot \sin \alpha)^2 + (y - y_{12})^2 - R^2 = 0$$

$$(53) \quad \Phi_3(x, y, z) = \left[ -x \cdot \sin \alpha + z \cdot \cos \alpha - z_{14} - A \left( 1 + \frac{z_{14} - z_{12}}{H} \cdot \cos \delta \right) - H (1 \cos \Delta + \right. \\ \left. + \frac{z_{14} - z_{12}}{H} \cos 2\Delta) \right]^2 + \left[ y - y_{14} - A \left( \cos \Delta - \frac{z_{14} - z_{12}}{H} \right) - \right. \\ \left. - H (\cos 2\Delta - 2 \cos \Delta \frac{z_{14} - z_{12}}{H}) \right]^2 - R^2 = 0$$

където:  $\alpha$  - ъгъл на атака на колооста спрямо релсовия път, т.е. ъгъл между координатната система  $(x, y)$  и  $(x_l, y_l)$ ;  $\delta$  - ъгъл определен от геометрията на цилиндричните повърхнини на релсовата глава - ъгъл между оста  $O_1 O_2$  и оста на симетрия на повърхнината II.

Определянето на координатите на контактните точки между колелата и релсите и координатите на точките се осъществяват въз основа на следните геометрични свойства и зависимости:

I. Трите контактни точки  $M_1$ ,  $M_2$  и  $M_3$  лежат както върху повърхностите на релсата, така и върху повърхностите на търкаляне на колелета, следователно:

$$(54) \quad \Phi_1(x_1, y_1, z_1) = 0 \quad F_1(x_1, y_1, z_1) = 0$$

$$(55) \quad \Phi_2(x_2, y_2, z_2) = 0 \quad F_2(x_2, y_2, z_2) = 0$$

$$(56) \quad \Phi_3(x_3, y_3, z_3) = 0 \quad F_3(x_3, y_3, z_3) = 0$$

II. Нормалата в контактната точка е една и съща за двете повърхнини и тя се определя от стойностите на частните производни в тези точки, следователно:

$$(57) \quad \frac{F_{1x}(x_1, y_1, z_1)}{\Phi_{1x}(x_1, y_1, z_1)} = \frac{F_{1y}(x_1, y_1, z_1)}{\Phi_{1y}(x_1, y_1, z_1)}, \quad \frac{F_{1x}(x_1, y_1, z_1)}{\Phi_{1x}(x_1, y_1, z_1)} = \frac{F_{1z}(x_1, y_1, z_1)}{\Phi_{1z}(x_1, y_1, z_1)}$$

$$(58) \quad \frac{F_{2x}(x_2, y_2, z_2)}{\Phi_{2x}(x_2, y_2, z_2)} = \frac{F_{2y}(x_2, y_2, z_2)}{\Phi_{2y}(x_2, y_2, z_2)}, \quad \frac{F_{2x}(x_2, y_2, z_2)}{\Phi_{2x}(x_2, y_2, z_2)} = \frac{F_{2z}(x_2, y_2, z_2)}{\Phi_{2z}(x_2, y_2, z_2)}$$

$$(59) \quad \frac{F_{3x}(x_3, y_3, z_3)}{\Phi_{3x}(x_3, y_3, z_3)} = \frac{F_{3y}(x_3, y_3, z_3)}{\Phi_{3y}(x_3, y_3, z_3)}, \quad \frac{F_{3x}(x_3, y_3, z_3)}{\Phi_{3x}(x_3, y_3, z_3)} = \frac{F_{3z}(x_3, y_3, z_3)}{\Phi_{3z}(x_3, y_3, z_3)}$$

където с долен индекс е означена частната производна по съответната ос.

III. Последното тринадесето уравнение се получава от геометрични зависимости:

$$(60) \quad H \cdot \cos \varphi = H \cdot (y_{14} - y_{12})$$

Така, при наличието на триточков контакт на атакуващата колоос, системата се образува от уравненията от (54) до (60).

При определени условия на движение е възможно талигата да заеме положение на максимално прекосяване, при което последната колоос на талигата има също триточков контакт, но по отношение вътрешната релса. Чрез подходяща смяна на координатната система задачата се свежда до решаване на същата система уравнения.

Възможностите на метода за вписване в крива с пряко и еднозначно определяне на всички величини, характеризиращи разположението на екипажа и взаимодействието между елементите на системата, са разширени чрез въвеждане на опростяващи предпоставки, изложени по-горе. Задачата за определяне на координатите на контактните точки и свързаните с тях величини съществено се опростява. Решението се свежда до намиране на контактните точки между две равнини (криви на бандажния профил и на профила на релсовата глава).

За намиране на допирната точка между кривите на двата профила при дадено разположение на колооста, характеризирани от напречната хлабина  $\sigma_j$  между реборда на външното колело и съответната релса, изхождайки от изискването за обща тангента към кривите на двата профила в контактната точка, трябва да бъдат определени първите производни на тези контактни криви и да бъдат приравнени изразите им. Чрез решаване на така полученото уравнение се намира координатата „ $y$ ” на допирната (контактната) точка -  $y_{aj}$  съответно  $y_{ij}$ . Удобно е да се започне от средното положение на колооста, където радиусите, съответстващи на контактни точки на външното и вътрешно колела са еднакви, хлабината  $\sigma_j$  е равна на половината от общата хлабина между релсите и ребордите и, при наличие на симетрия между профилите на външните и вътрешни контактуващи криви, оста на колооста е в строго хоризонтално разположение. След определяне на координатите  $y_{aj}$  и  $y_{ij}$  на контактните точки за средно положение се задава някакво изместване на колооста, например на ляво в посока на намаляване на хлабината  $\sigma_j$  и при така фиксираното ново положение след съответната трансляция и ротация на координатните системи на криви от профилите на бандажите и релсите по описания начин се търсят новите координати  $y_{aj}$  и  $y_{ij}$  на контактните точки на външното и вътрешно колела при съответната нова стойност на хлабината  $\sigma_j$ . Така стъпка по стъпка се достига до възможните крайни положения на колооста. Трябва да се отбележи, че във всички случаи се отчита наклона на оста на колооста чрез извършване на ротация на координатната система, като се държи сметка за разположението на контактните точки и върху самите релси.

Резултатите могат да се изложат графично и или да бъдат апроксимирани с подходящи аналитични зависимости  $y_{aj} = y_{aj}(\sigma_j)$  и  $y_{ij} = y_{ij}(\sigma_j)$ . Последните се използват в система уравнения заедно с аналитичните зависимости на радиусите  $r_{aj} = r_{aj}(y_{aj})$ ,  $r_{ij} = r_{ij}(y_{ij})$  и ъглите  $\gamma_{aj} = \gamma_{aj}(y_{aj})$   $\gamma_{ij} = \gamma_{ij}(y_{ij})$  на наклона, на контактните точки.

В голяма част от разгледаните трудове се използват силовите уравнения от условието за равновесие за отделни колооси. Обикновено решенията се проверяват чрез контролни уравнения за рамата на талигата. Задават се

стойности на едно или две от неизвестните и решенията се повтарят до достигане на приемливо съвпадение на зададените и получените стойности. Налага се и уточняване на параметрите (ъгъл на атака и хлабина „реборд-релса), които определят разположението на колоосите, чрез поставяне в уравненията координатите на контактните точки. Допълнително усложняване на решението се получава, ако се налага апроксимиране на тороидалната повърхност на търкаляне с конуси. Приет е итеративен подход, при който не се решава цялата система, а отделни уравнения или групи, което често води до неточности в решенията. Липсва функционална аналитична връзка между, от една страна, координатите и параметрите на контактните точки, и параметрите на разположението на колоосите и от друга – силовите уравнения. Тези затруднения се премахват чрез въвеждане в системата на свързани с контактните точки кинематично-геометрични зависимости, изведени на базата на приетото по-горе опростяване. Целта е да се премахне основната величина (ъгъла на атака) от уравненията в които има незначително влияние и да се въведе като неизвестно в други уравнения, където неговото влияние е съществено.

В общата система, се въвеждат и геометрични характеристики чрез уравнения, описващи връзките между параметрите на разположението на колоосите в крива – ъгъла на атака и разстоянието „реборд-външна релса” и относителните хоризонтални премествания „букса-рама” в надлъжно и напречно направление.

### **Изводи и заключения**

1. Направен е сравнителен анализ, оценка и избор на теоретичен метод за квазистатично вписване при установено движение в крива на железопътен двuosен екипаж (талига) за най-общия случай на свободно установяеми до упор еластично свързани с рамата колооси в хоризонтално направление.

2. Определени са ъгъла на атака, хоризонталните отклонения на буксите спрямо рамата, напречните хлабини между ребордите на колоосите и релсите, както и всички геометрични и силови величини, определящи разположението на екипажа с неговите елементи и силовото взаимодействие в системата.

3. На база сравняване на резултатите, получени на основата на дедуктивният нелинеен модел с резултатите, изчислени по опростената нелинейна хипотеза е доказано, че дедуктивният модел описва точно нелинейното съотношение на крипа когато две от трите компоненти на крипа са равни на нула.

4. Задачата за квазистатично вписване в крива на жп екипаж се решава с помощта на координатите на контактните точки на колелата с релсите, като от тях непосредствено са определени параметрите: радиуси на търкаляне, наклони, кривини и свързаните с тях размери и форма на контактните петна; скоростите на приплъзване между колелата и релсите; силовото взаимодействие между тях; кинематиката на процеса на износване и др.

5. В системата са използвани опростени кинематично-геометрични зависимости, с цел изключване на ъгъла на атака от уравненията, в които той има незначително влияние. Въведени са геометричните ѝ характеристики чрез уравнения на връзките между параметрите на разположението на колоосите в

крива – ъгъла на атака и разстоянието „реборд-външна релса” и относителните хоризонтални премествания „букса-рама”.

### **Литература**

[1] Аватков, Е.С. Устойчивост движения екипажей при високих скоростях. Экспрес – информация, Локомотивостроение и вагоностроение “Вопросы теории, конструирования и исследований локомотивов и вагонов” рефераты 195-200 №45, 7 декабря 1977, с.1-24

[2] Ахмаджова Д., Определяне ъгъла на атака между колело-релсата при движението на железопътен състав в криви участъци от пътя София, Електронно списание “Механика Транспорт Комуникации“ бр.2, 2006

[3] Ахмаджова Д. Алгоритми на Калкер за изследване взаимодействието „колело-релса” София, XV НК с международно участие на ВТУ “Т. Каблешков”, 2005

[4] Atmadzhova D. A method for determination of the wheel rail contact. Nis, XII SCIENTIFIC-EXPERT CONFERENCE ON RAILWAYS RAILCON '06, Serbia and Motenegro Faculty of Mechanical Engineering University of Nis, 2006

[5] Димитров Е. Н. Върху определянето на направляващата способност на локомотивна колоос, Кандидатска дисертация, С. 1979

[6] Chang E. H., Garg V. K., Hartmann P. W. Technical Documentation, Locomotive Response Model. – Report R-295, Association of American Railroads, Chicago, 1978, February

[7] Hedrick J. K., Wormley D. N., Arslan A. V., Castelazo I., Chin R., Jafferian D. Nonlinear Analysis and Design Tools for Rail Vehicle.- Phase I, Report R – 381, Chicago, Association of American Railroads, 1979, June

[8] Nagurka N. L., Bell C. F., Hedrick J. K., Wormley D. N. Computational Methods for Rail Vehicle Steady – State Curving Analysis. Computational Methods in Ground Transactions Vehicles.- Transactions of American Society of mechanical engineers, Applied Mechanics Division, 1982, v. 50

[9] Smith K. R., Mac Millan R. D., Martin G. C. 2, 3, and 4 Axle Riding Truck Curve Negotiation Model, User’s Manual.- Research Report R-204, prepared for the Association of American Railroads, Chicago, 1976, March

[10] Collman M., Brantman R., Tong P. A Description of the Tests Conducted and Data Obtained during the Perturbed Track Test.- Report FRA/ORT-8015, U. S. Department of Transaction, Transaction System Center, Cambridge, Massachusetts, 1980, January

[11] Law E. H., Cooperrider N. K. Nonlinear dynamic and steady state curving of rail vehicle.- Proceedings of the 1980 American Society of Mechanical Engineers Winter Annual Meeting, San Francisco, California, 1981, December