

МЕТОД НА ЦЕНТРОВИТЕ РАВНИНИ – МОДЕЛИРАНЕ НА ДИСКРЕТНИ ВАЛОВИ СИСТЕМИ С ПОСЛЕДОВАТЕЛНА ПЕРИОДИЧНА СТРУКТУРА

Петър Колев Колев

petar_kolev@BGscience.com ; petarkolev@abv.bg

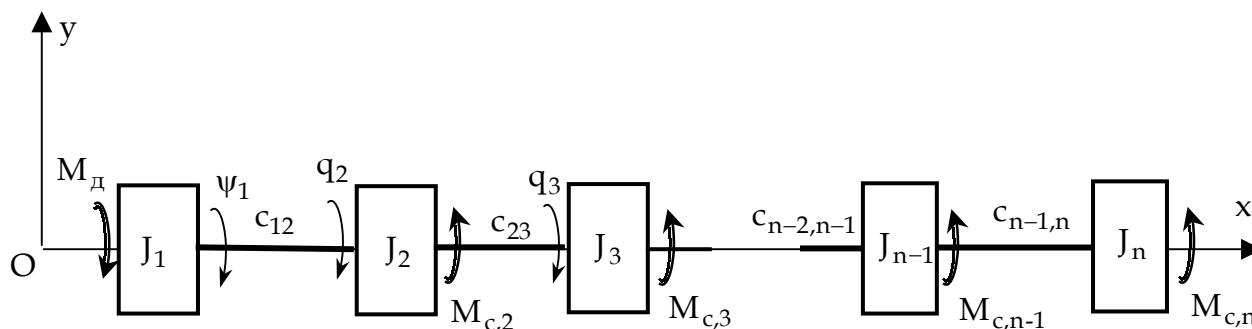
Катедра “Механика”, ВТУ “Т. Каблешков” - София 1574, БЪЛГАРИЯ

Ключови думи: еластодинамика, валови системи, валопроводи, машинен агрегат.

Резюме: Представя се метод за моделиране на валови системи, при който се постига разделяне на диференциалните уравнения описващи макродинамиката от тези описващи микродинамичните процеси, без да се губи взаимодействието между тях. Въвеждат се нови понятия.

1. Увод

Множество изследвания на усукващите трептения в електрически машини, автомобили, корабни системи и други се извършват върху динамични



Фиг.1. Динамичен модел

модели от вида показан на фиг.1. Системите извършват непрекъснати ротационни движения (регионални движения) и насложени върху тях усукващи трептения.

Характеристичните им уравнения съдържат нулеви корени-двукратни

елементарни делители. Притежават и други свойства, според които можем да ги причислим към особените системи [1]. Тук, както при манипулационните системи, въвеждаме подобно понятие “центрова равнина”, като геометрично място на центровете оси на напречните сечения на валовата система.

При тези системи, за разлика от манипулационните, положението на центровете равнини не е толкова важно, тъй като то не е свързано с функционалното им предназначение. Важно е обаче, че те съществуват и ако се използват при математическото моделиране на системите се постигат същите ефекти.

За дискретните валови системи, това е разделянето на диференциалните уравнения описващи макродинамиката от тези описващи микродинамичните процеси без да се губи взаимодействието между тях.

При континуално-дискретните валови системи (валовите са с разпределени масови и еластични параметри) освен това се постига и коректно решение на смесената гранична задача и задача на Коши. При тях изследванията са по-сложни и е необходимо да познаваме приложението на метода при дискретните валови системи.

2. Центрова равнина.

Ще разгледаме обобщения модел на валова система (фиг.1). Центровата равнина ”Г” минава през оста на валовата система и има параметър ψ^* , който определяме чрез обобщения импулс на системата. За целта изолираме системата от външни активни въздействия и разглеждаме движението ѝ само в полето на еластичните сили.

Съставяме кинетичния потенциал на валовата система

$$(1) \quad L = \frac{1}{2} \left[J_1 \omega_1^2 + \sum_{i=2}^n J_i \left(\omega_1 + \sum_{j=2}^i \dot{q}_j \right)^2 - \sum_{j=2}^n c_{j-1,j} q_j^2 \right]$$

и определяме обобщения импулс $\frac{\partial L}{\partial \omega_1}$ т.е.

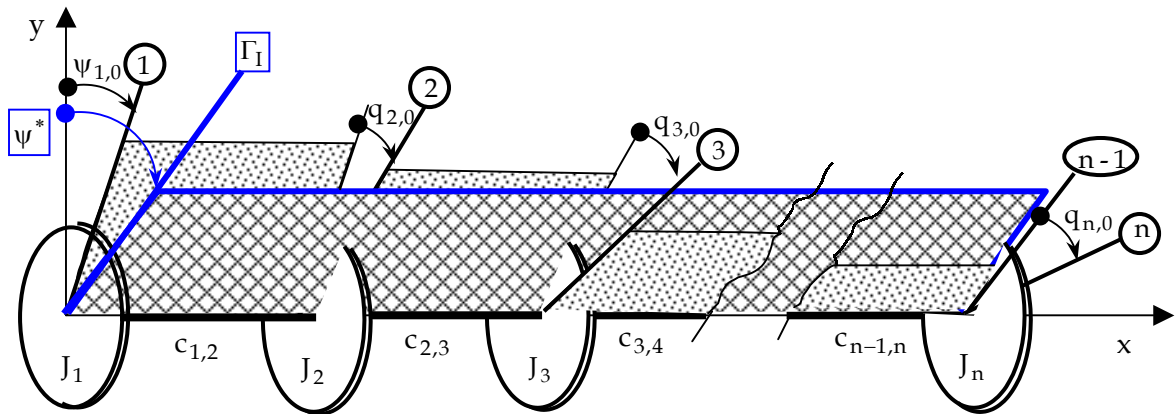
$$(2) \quad \bar{J}_1 \omega_1 + \sum_{j=2}^n \bar{J}_j \dot{q}_j = C \quad \text{където: } \bar{J}_j = \sum_{i=j}^n J_i$$

Ако системата започва движение от състояние на покой (при геометрични начални условия) тази константа е нула, тъй като уравнението (2) задава кинетичния момент K_x .

Като интегрираме (2) при геометрични начални условия $q_{j,0} = \theta_j$ ($j = 2,3,\dots,n$) и отчетем че:

- системите извършват трептене в околността на равновесното положение;

- потенциалната енергия $\Pi = \Pi(q_2, \dots, q_n)$ е потенциална енергия на деформацията и за равновесното положение при $q_j = 0$ добива минимум



Фиг.2 Центрова равнина

$\Pi_{\min} = \Pi(0, \dots, 0) = 0$ следва, че параметърът на центровата равнина се определя с израза:

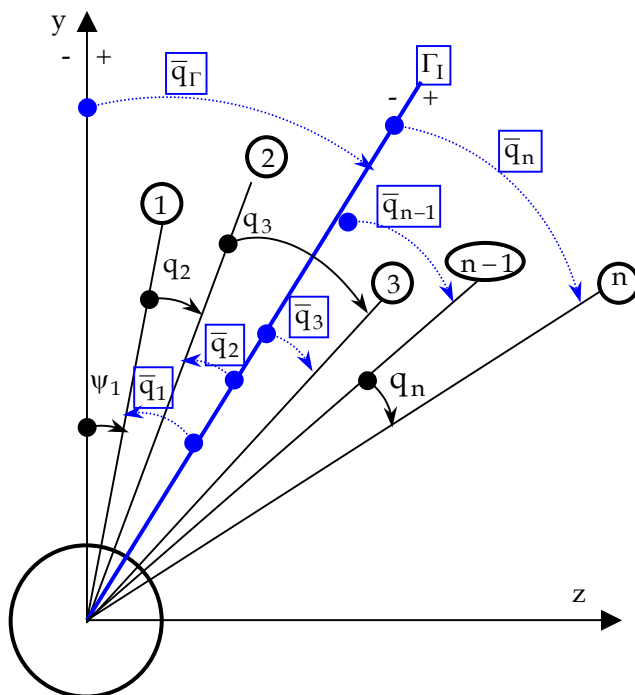
$$(3) \quad \psi^* = \psi_{1,0} + \sum_{j=2}^n \frac{\bar{J}_j}{\bar{J}_1} \theta_j$$

3. Геометрично центрово условие.

Разделянето на уравненията в математичния модел се постига, когато регионалното движение се описва, чрез движението на центровата равнина, а ъгловите трептения се извършват в нейната околност. При отсъствие на активни външни въздействия и при геометрични начални условия, центровата равнина

остава неподвижна и системата извършва несмутено движение, което в приложението на този метод са собствените ъглови трептения в полето на еластичните сили.

Съществено значение при моделирането на системите имат холономни зависимости между центровите обобщени координати, които се наричат “геометрични центрови условия”. Броят им е равен на броя на регионалните степени на свобода т.е. на всеки нулев корен на характеристичното уравнение, който е двукратен елементарен делител, съответства геометрично центрово условие. Да построим ъгловата диаграма (фиг.3) на системата, която обединява реперните оси на отделните маси и сечението на “центровата равнина”



Фиг.3 Ъглова диаграма

с равнина ортогонална на оста на системата. Началото на центровите обобщени координати \bar{q}_j ($j = 2, \dots, n$) е в центровата равнина, чието положение и движение се описва от центровата обобщена координата \bar{q}_Γ . Релацията между обобщените координати и центровите обобщени координати се дава с изразите

$$(4) \quad \psi_1 = \bar{q}_\Gamma + \bar{q}_1, \quad q_j = \bar{q}_j - \bar{q}_{j-1} \quad (j = 2, \dots, n)$$

Определяме обобщения импулс чрез центровите обобщени координати (5)

$$(5) \quad \bar{J}_1 \dot{\bar{q}}_1 + \bar{J}_2 (\dot{\bar{q}}_2 - \dot{\bar{q}}_1) + \bar{J}_3 (\dot{\bar{q}}_3 - \dot{\bar{q}}_2) + \dots + \bar{J}_n (\dot{\bar{q}}_n - \dot{\bar{q}}_{n-1}) = \sum_{j=1}^n J_j \dot{q}_j = 0$$

Като интегрираме полученото уравнение и отчетем, че реперните оси едновременно преминават през центровата равнина, което следва от (5), определяме геометричното центрово условие.

$$(6) \quad \hat{\Gamma} \equiv \sum_{j=1}^n J_j \dot{\bar{q}}_j = 0$$

4. Моделиране на смутеното движение на валовата система.

Определяме енергийните функции и обобщените сили.

$$T = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n J_j (\dot{\bar{q}}_\Gamma + \dot{\bar{q}}_j)^2, \quad \Pi = \frac{1}{2} \sum_{j=2}^n c_{j-1,j} (\bar{q}_j + \bar{q}_{j-1})^2$$

$$(7) \quad Q_\Gamma = M_d - \sum_{j=2}^n M_{C,j} \quad Q_1 = c_{1,2} (\bar{q}_2 + \bar{q}_1) + M_d$$

$$Q_j = -c_{j-1,j} (\bar{q}_j + \bar{q}_{j-1}) + c_{j,j+1} (\bar{q}_{j+1} + \bar{q}_j) - M_{C,j} \quad (j = 2, \dots, n-1)$$

$$Q_n = -c_{n-1,n} (\bar{q}_n + \bar{q}_{n-1}) - M_{C,n}$$

Геометричното центрово условие (6) задава холономна зависимост между обобщените центрови координати, поради което те са зависими. По тази причина за извод на диференциалните уравнения ще приложим модифицираните уравнения за холономна система [1],[2], като за зависима е подходящо да изберем координатата \bar{q}_1 .

$$(8) \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\bar{q}}_j} \right) - \frac{\partial T}{\partial \bar{q}_j} = Q_j + (Q_1 + \Phi_1) \frac{\partial f_1}{\partial \bar{q}_j} \quad (j = \Gamma, 2, 3, \dots, n)$$

$$(9) \quad f_1 \equiv \bar{q}_1 = - \sum_{j=2}^n \frac{J_j}{J_1} \bar{q}_j \quad \Phi_1 = -J_1 (\ddot{\bar{q}}_\Gamma + \ddot{\bar{q}}_1)$$

Като заместим кинетичната енергия и обобщените сили в уравненията (8) и отчетем (9) след съответни приведения получаваме диференциалните уравнения на смутеното движение:

$$\bar{J}_1 \ddot{\bar{q}}_\Gamma = M_d - \sum_{j=2}^n M_{c,j}$$

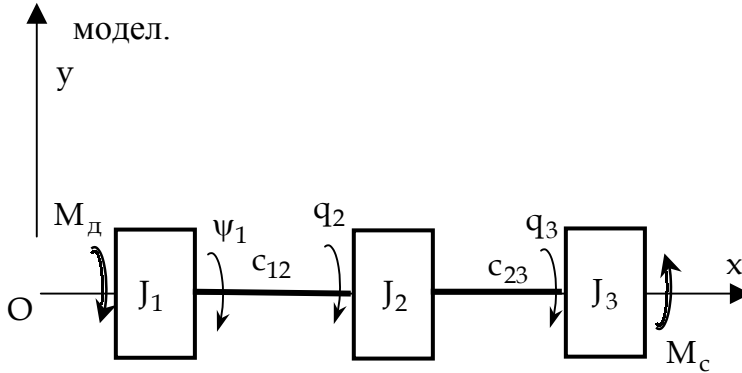
$$\tau \dot{M}_d + M_d = M_{st}^d$$

$$(10) \quad \frac{J_j}{J_1} \left[(J_1 + J_j) \ddot{\bar{q}}_j + \sum_{\substack{i=2 \\ i \neq j}}^n J_i \ddot{\bar{q}}_i \right] = - \left\{ \begin{array}{l} M_d \frac{J_j}{J_1} + M_{c,j} + c_{12} \left(\lambda + \frac{J_j}{J_1} \right) \left[\bar{q}_2 + \sum_{i=2}^n \frac{J_i}{J_1} \bar{q}_i \right] + \\ (1-\lambda)(\bar{q}_j - \bar{q}_{j-1})c_{j-1,j} - \mu(\bar{q}_{j+1} - \bar{q}_j)c_{j,j+1} \end{array} \right\}$$

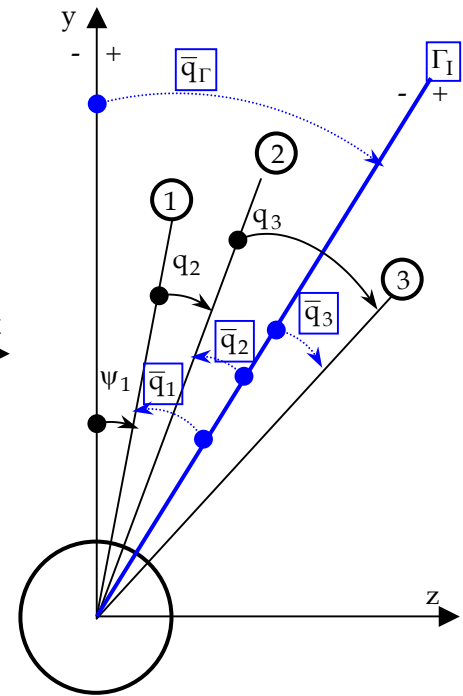
$$(j = 2, \dots, n) \quad \lambda \Rightarrow \begin{cases} = 1 & \text{за } j = 2 \\ = 0 & \text{за } j \neq 2 \end{cases} \quad \mu \Rightarrow \begin{cases} = 1 & \text{за } j = n \\ = 0 & \text{за } j \neq n \end{cases}$$

4. Числена реализация

Нека да разгледаме тримасов динамичен модел.



Фиг.4. Тримасов динамичен модел
Ъглова диаграма



От уравненията (10) за $n = 3$ получаваме

уравненията:

(11)

$$(J_1 + J_2 + J_3) \ddot{\bar{q}}_\Gamma = M_d - M_c$$

$$\frac{J_2}{J_1} (J_1 + J_2) \ddot{\bar{q}}_2 + \frac{J_3 J_2}{J_1} \ddot{\bar{q}}_3 = - \left[c_{12} \left(1 + \frac{J_2}{J_1} \right)^2 + c_{2,3} \right] \bar{q}_2 + \left[c_{2,3} - c_{12} \left(1 + \frac{J_2}{J_1} \right) \frac{J_3}{J_1} \right] \bar{q}_3 - M_d \frac{J_2}{J_1}$$

$$\frac{J_3 J_2}{J_1} \ddot{\bar{q}}_2 + \frac{J_3}{J_1} (J_1 + J_3) \ddot{\bar{q}}_3 = \left[c_{2,3} - c_{12} \left(1 + \frac{J_2}{J_1} \right) \frac{J_3}{J_1} \right] \bar{q}_2 - \left[c_{12} \left(\frac{J_3}{J_1} \right)^2 + c_{2,3} \right] \bar{q}_3 - M_c - M_d \frac{J_3}{J_1}$$

$$\tau \dot{M}_d + M_d = u - v \omega_1 + w_2 \omega_1^2 - w_4 \omega_1^4$$

Въз основа на математичния модел (11) на валовата система, чрез програмата “Matlab 5.3.0”, е съставен симулационен модел при следните механични параметри на системата и задвижване с асинхронен двигател представен чрез динамичната си характеристика:

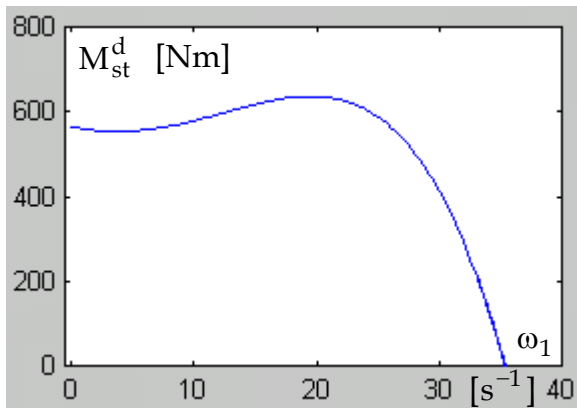
$\ell_{12} = 1,2 \text{ m}; \quad \ell_{23} = 1,2 \text{ m}; \quad$ дължина на валове

$m_1 = 225 \text{ kg}; \quad m_2 = 26 \text{ kg}; \quad m_3 = 225 \text{ kg};$

$I_{12} = I_{23} = 1,155 \cdot 10^{-7} \text{ m}^4;$ площни инерционни моменти

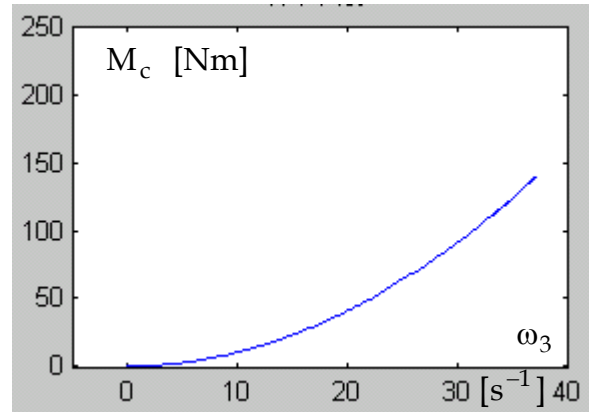
$i_1 = 0,1 \text{ m}, \quad i_3 = 0,1 \text{ m},$ инерционни радиуси

$G = 7,94 \cdot 10^{10} \text{ Pa}$ модул на еластичност



$$M_{st}^d = u - v\omega + w_2\omega_1^2 - w_4\omega_1^4$$

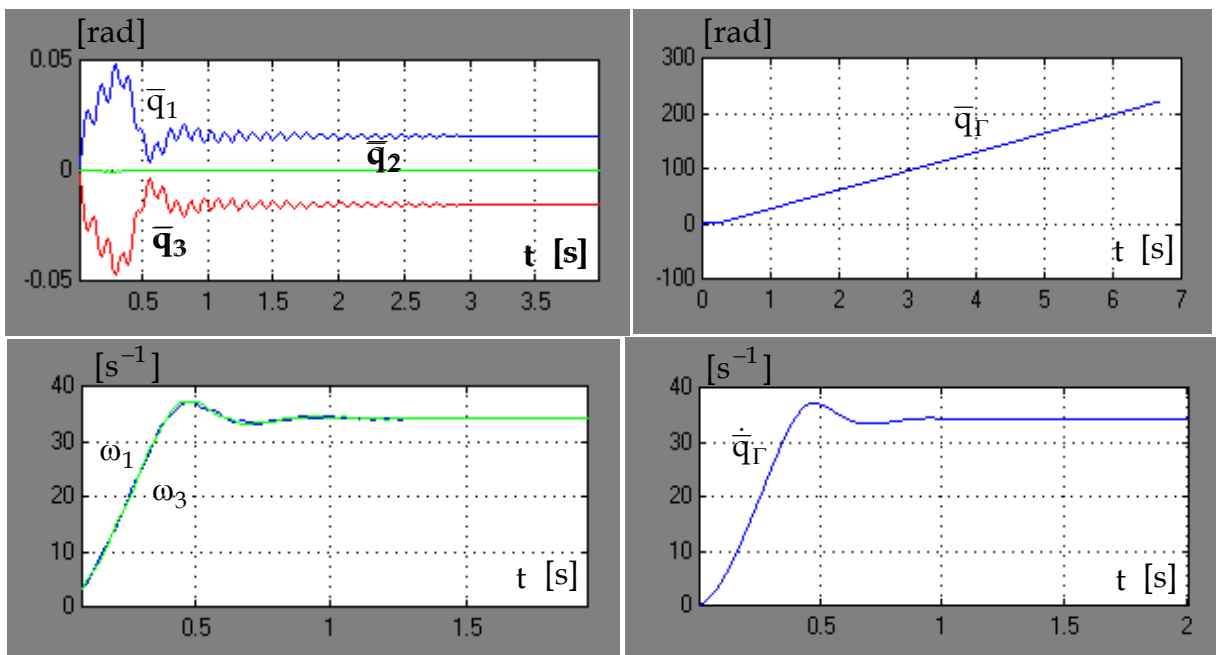
Фиг. 5. Статична характеристика на асинхронен двигател



$$M_c = u_c + v_c |\omega_6| + w_c \omega^2$$

Фиг.6.Обобщено съпротивление

От графиките на законите на движение в центрови обобщени координати (фиг. 7) се вижда, че в процеса на ускоряване при тези параметри на системата, масите 1 и 3 трептят в противофаза, а реперната ос на втората маса лежи в центровата равнина.

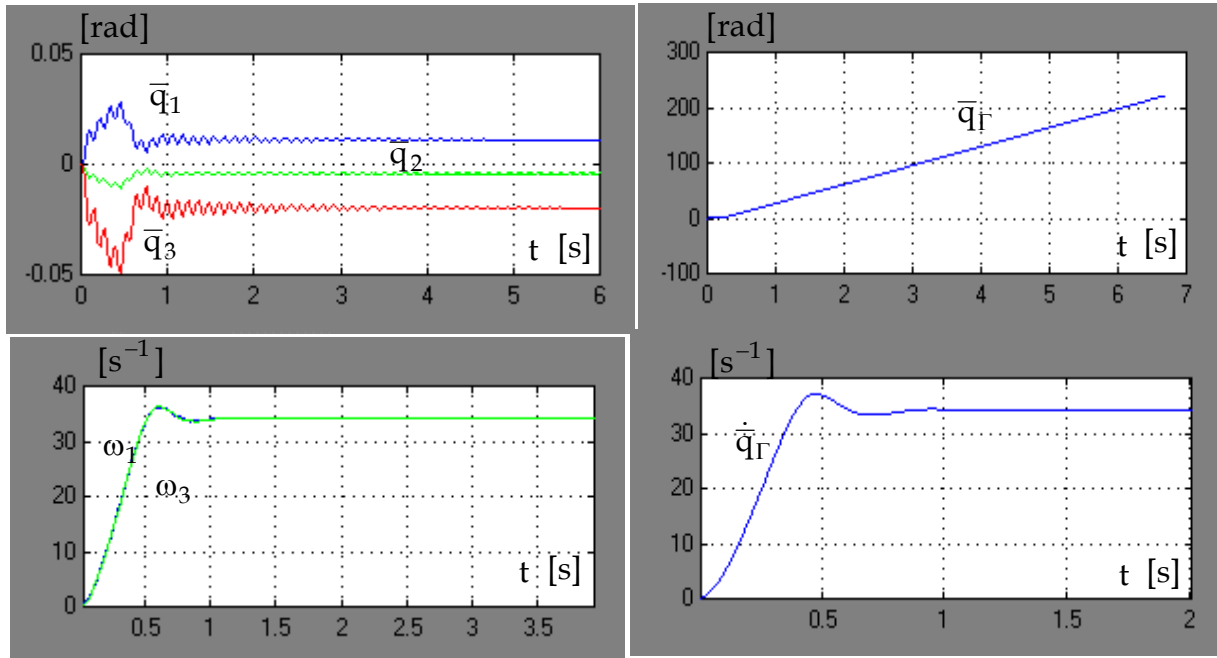


Фиг.7

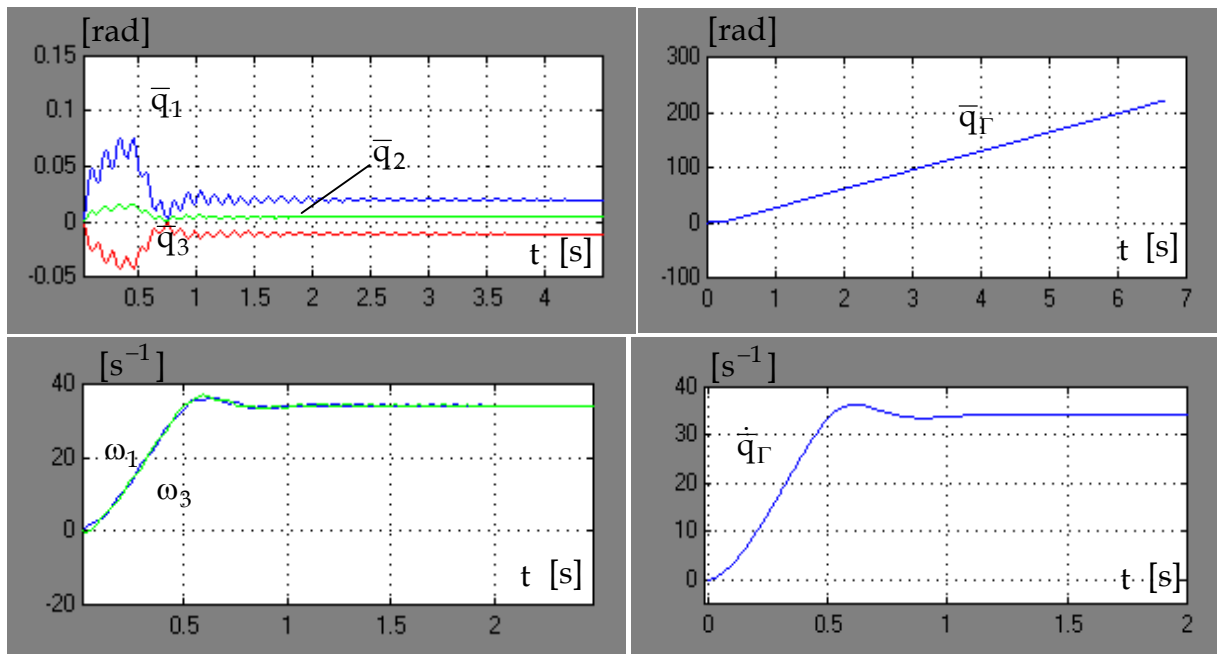
На фигурите 8 и 9 са показани графиките съответно при:

а) $m_1 = 400\text{kg}$; $m_2 = 26\text{kg}$; $m_3 = 225\text{kg}$;

б) $m_1 = 225\text{kg}$; $m_2 = 26\text{kg}$; $m_3 = 400\text{kg}$;



Фиг.8

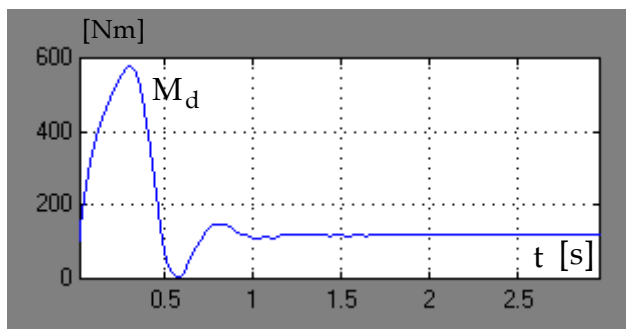


Фиг.9

Очевидно е, когато първата маса надвишава сумата на останалите центровата равнина е между реперните оси на първата и втората маса, а когато тази релация е между третата маса и останалите, центровата равнина е между реперните

оси на третата и втората маса.

Това потвърждава едно от важните свойства на центровете равнини като аналог на центровете оси [1], а именно, че зависимостите между обобщените центрови координати определени с геометричните центрови условия се запазват и при смутените движения.



Фиг.10

Двигателният момент, участващ при моделирането с динамичната си характеристика, получен при интегрирането на математичния модел се изменя по зависимостта показана на графиката на фиг.10. В процеса на численото симулиране на движението на валовата система се изчертава и статичната характеристика на двигателя,

дадена на фиг.5, както и на обобщеното съпротивление (фиг.6).

ЛИТЕРАТУРА

- [1] КОЛЕВ П. К. Метод на центровете оси в еластодинамиката на манипулационни системи. Дисертация – дтн, 2003г
- [2] KOLEV P. K., Modified equations of Lagrange of II kind. Mechanics Transport Communications, N 1, 2003, www.mtc-aj.com.

METHOD OF PLANES OF CENTERS: MODELING DISCRETE SHAFT SYSTEMS WITH CONTIGUOUS PERIODIC STRUCTURE

Piter Kolev Kolev

Keywords: *elastic dynamics, shaft systems, shaft system, machine aggregates.*

Abstract: *The paper presents a method of shaft system modeling, which is used to achieve separation of the differential equations describing the macro-dynamics processes without losing the interaction among them. Some new concepts have been introduced.*