

## МОДЕЛИРАНЕ НА ПОДВИЖЕН ЖЕЛЕЗОПЪТЕН СЪСТАВ С ТВЪРДИ И ЕЛАСТИЧНИ ЕЛЕМЕНТИ

Добринка Агмаджова,  
[atmadzhova@abv.bg](mailto:atmadzhova@abv.bg)

доц. д-р инж., Висше транспортно училище "Тодор Каблешков", катедра "Транспортна техника"  
ул. "Гео Милев" 158, София 1574,  
БЪЛГАРИЯ

**Резюме:** В статията се разглежда механична система от твърди и еластични системи. Разглеждат се диференциалните уравнения със специфична дясна част на тяхното движение и техниката на отстраняване на алгебричната част за получаването на обикновени диференциални уравнения. Отражени са основните етапи и изисквания при моделирането на подвижен железопътен състав като система от твърди и еластични тела.

**Ключови думи:** подвижен железопътен състав, моделиране.

### ВЪВЕДЕНИЕ

В най-общия случай на свързване на твърдо и еластично тела 1 и 2 се прилагат следните диференциални уравнения със специфична дясна част (ДУС):

$$(1) \begin{cases} M_1 \ddot{q}_1 = Q_1 + (G_1^T \lambda) \\ M_2 \ddot{q}_2 = Q_2 + (G_2^T \lambda) \\ (g(q_1, q_2) = 0) \end{cases}$$

където:  $M_i$  - масова матрица;  $Q_i$  - обобщените сили;  $q_i$  - координатите на двете тела;  $g$  - ограниченията в резултат на силите на реакциите  $G_i^T \lambda$  с матрицата на Якобиян  $G_i = \partial g / \partial q_i^T$  и неопределеният множител на Лагранж -  $\lambda$ :  $\dim \lambda = \dim g$

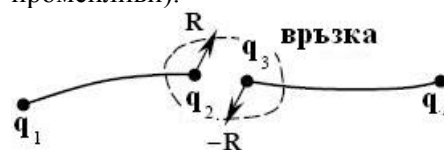
ДУС представляват допълнителна трудност в числените изследвания от типа с проблем на нарушени ограничения. Те могат успешно да бъдат решени, използвайки специални методи [7].

В много случаи могат да бъдат избегнати ДУС, като за пример това е метода на крайните елементи (МКЕ).

### 1. СВЪРЗВАНЕТО КАТО ПРОЦЕДУРА В МКЕ

Нека разгледаме 2 крайни елемента, показани като лъчи на фиг.1. Нека тяло 1 е с централни (нормални) координати, разделени на две части, които са  $q_1$  и  $q_2$  и за тяло 2 те са  $q_3$  и  $q_4$ , така, че  $q_2$  и  $q_3$  се явяват свързващи

(елементите могат да бъдат свързани с тези променливи).



Фиг.1 Свързване на два крайни елемента

Уравненията на движение на двата елемента са:

$$(2) \begin{cases} M_{11} \ddot{q}_1 + M_{12} \ddot{q}_2 = Q_1 \\ M_{21} \ddot{q}_1 + M_{22} \ddot{q}_2 = Q_2 + (R) \\ M_{33} \ddot{q}_3 + M_{34} \ddot{q}_4 = Q_3 - (R) \\ M_{43} \ddot{q}_3 + M_{44} \ddot{q}_4 = Q_4 \\ (q_2 \equiv q_3 = q_*) \end{cases}$$

с матрицата на масите  $M_{ij}$  обобщените сили  $Q_i$  и силите на реакциите  $R$ . Елементите в скоби се появяват, когато има връзки както е показано на фиг.1. Уравненията имат ДАУ по форма (1), но ограниченията са тривиални. Елиминирането на  $R$  за второто и третото уравнение и отчитането на тяхното уравнение води до следната система обикновени диференциални уравнения (ОДУ):

$$(3) \begin{bmatrix} M_{11} & M_{12} & 0 \\ M_{21} & M_{22} + M_{33} & M_{34} \\ 0 & M_{43} & M_{44} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{q}_1 \\ \ddot{q}_* \\ \ddot{q}_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} Q_1 \\ Q_2 + Q_3 \\ Q_4 \end{Bmatrix}$$

където: масовата матрица на системата и обобщените сили са създадени за отделни елементи.

По-нататък тази идея ще бъде използвана за свързването на твърд и еластичен елемент.

## 2. СЪВМЕСТИМИ КООРДИНАТИ ЗА ТВЪРДИ И ЕЛАСТИЧНИ ЕЛЕМЕНТИ

Възможностите за отстраняване уравненията за ограничения зависят от съвместимостта на координатите на твърдите и еластични тела. Твърдите тела обикновено имат ъгъл на завъртане като обобщена координата:  $\phi$  в двумерно (2D) и  $\alpha\beta\gamma$  в тримерното (3D) пространство.

Ние разглеждаме формулиране на крайни елементи за симулиране на еластични тела. Един от тях е вектор на вътрешно, формулиран в [5], които имат абсолютни ъгли на въртене. Например елементите, изобразени на фиг.1 имат следната структура на обобщени координати:  $\mathbf{q}_i = \{x_i, y_i, \phi_i\}^T$ , където  $x_i$  и  $y_i$  са абсолютни декартови координати на  $i$ -тия възел в същото време, като  $\phi_i$  е абсолютното ъглово завъртане. 3D положение и равнинен елемент в тази формулровка [6] има централни координати, подобно на тези:  $\mathbf{q}_i = \{x_i, y_i, z_i, \alpha_i, \beta_i, \gamma_i\}^T$ . Очевидно тези крайни елементи могат да бъдат съединени с твърди тела и да се координират съвместимости.

## 3. ФОРМУЛИРАНЕ НА МКЕ С НЕСЪВМЕСТИМИ КООРДИНАТИ

Друг голям подход на крайните елементи е формулирането на абсолютни централни координати (ФАЦК). Структурата на централните координати за елементите на този метод, показани на фиг.1 и 2 са:  $\mathbf{q}_i = \{\mathbf{r}_i^T, \boldsymbol{\tau}_i^T\}^T$ , където  $\mathbf{r}_i$  и  $\boldsymbol{\tau}_i$  са абсолютния радиус вектор и наклонен вектор. Този подход води до постоянна масова матрица, нулеви центростремителни и инерционни сили, в различие от други формулировки [6]. Ясно е, че приложението в 2D твърдо тяло към такова ФАЦК елемент [9] води до уравнение на ограничение:

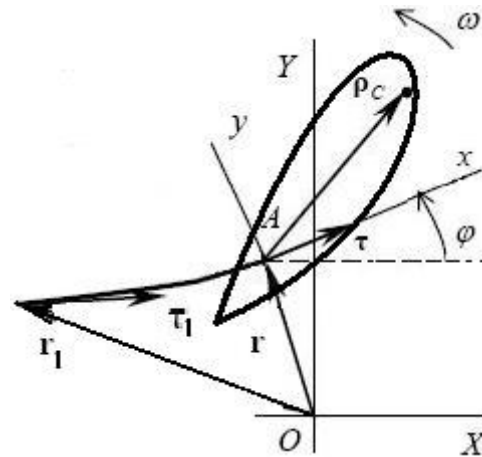
$$(4) \quad \phi = \arctan(\tau_y/\tau_x)$$

и затова се прибавя към диференциалното алгебрично уравнение (1).

За да отстраним ограниченията, ние трябва да направим твърдо тяло със съвместими координати за този елемент.

$$(5) \quad \mathbf{q} = \{\mathbf{r}^T, \boldsymbol{\tau}^T\}^T$$

Четири скаларни координати за равнинно твърдо тяло и трябва да се променят уравненията на движението [9].



Фиг.2 Координатни системи на твърдо тяло като равнинен елемент.

За ъгловата скорост на тялото от (4) е:

$$(6) \quad \boldsymbol{\omega} = \dot{\phi} = \frac{\dot{\boldsymbol{\tau}}^T \tilde{\mathbf{I}} \boldsymbol{\tau}}{\boldsymbol{\tau}^2} \quad \text{където: } \tilde{\mathbf{I}} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ +1 & 0 \end{bmatrix} \text{ и}$$

$$\boldsymbol{\tau}^2 = \tau_x^2 + \tau_y^2$$

Вектора на скоростта на произволна точка от тялото е:

$$(7) \quad \mathbf{v} = \dot{\mathbf{r}} + \tilde{\boldsymbol{\omega}} \boldsymbol{\rho} = \boldsymbol{\Phi} \dot{\mathbf{q}}$$

където скоростното преобразуване на матрицата на Якобиан е предоставена с  $\boldsymbol{\Phi} = [\mathbf{I} \quad \tilde{\mathbf{I}} \boldsymbol{\rho} \boldsymbol{\omega}_t^T]$ , като  $\boldsymbol{\omega}_t = \partial \boldsymbol{\omega} / \partial \boldsymbol{\tau} = \tilde{\mathbf{I}} \boldsymbol{\tau} / \boldsymbol{\tau}^2$ .

Тогава ще използваме принципа на виртуалната работа:

$$(8) \quad \int_V \delta \mathbf{r}^T \boldsymbol{\mu} (\mathbf{a} - \mathbf{g}) dV = 0$$

с виртуално преместване  $\delta \mathbf{r} = \boldsymbol{\Phi} \delta \mathbf{q}$  и ускорение  $\mathbf{a} = \dot{\mathbf{v}} = \boldsymbol{\Phi} \ddot{\mathbf{q}} + \dot{\boldsymbol{\Phi}} \dot{\mathbf{q}}$  за точка  $\boldsymbol{\rho}$  на тялото. Интегрираме параметъра  $V$ , като  $\boldsymbol{\mu}$  е плътност на масата на тялото в същото време, а  $\mathbf{g}$  е земното ускорение.

Уравнението на движението (8) в матрична форма е

$$(9) \quad \mathbf{M} \ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{Q}^{\text{inert}} = \mathbf{Q}^{\text{grav}}$$

$$\mathbf{M}(\mathbf{q}) = \int_V \boldsymbol{\mu} \boldsymbol{\Phi}^T \boldsymbol{\Phi} dV = \begin{bmatrix} m \mathbf{I} & m \tilde{\mathbf{I}} \boldsymbol{\rho}_C \boldsymbol{\omega}_t^T \\ m \boldsymbol{\omega}_t (\tilde{\mathbf{I}} \boldsymbol{\rho}_C)^T & \mathbf{I}_A \boldsymbol{\omega}_t \boldsymbol{\omega}_t^T \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{Q}^{\text{inert}}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \int_V \boldsymbol{\mu} \boldsymbol{\Phi}^T \dot{\boldsymbol{\Phi}} dV = -\mathbf{M} \begin{bmatrix} \boldsymbol{\omega}_t^2 \boldsymbol{\rho}_C \\ 2\boldsymbol{\tau}^{-2} (\boldsymbol{\tau}^T \dot{\boldsymbol{\tau}}) \dot{\boldsymbol{\tau}} \end{bmatrix}$$

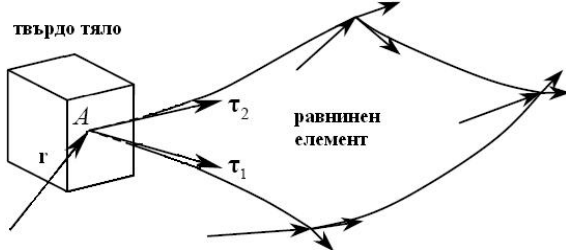
$$\mathbf{Q}^{\text{grav}}(\mathbf{q}) = \int_V \boldsymbol{\mu} \boldsymbol{\Phi}^T dV \mathbf{g} = \begin{bmatrix} m \mathbf{g} \\ \boldsymbol{\omega}_t m \mathbf{g}^T \tilde{\mathbf{I}} \boldsymbol{\rho}_C \end{bmatrix}$$

Тук  $m$  е масата на тялото,  $\boldsymbol{\rho}_C$  е позицията на центъра на тежестта в координатната система  $0XY$  и  $\mathbf{I}_A$  е инерционният момент на тялото (спрямо т.А).

#### 4. ФОРМУЛИРАНЕ НА АБСОЛЮТНИ ЦЕНТРАЛНИ КООРДИНАТИ ЗА ТВЪРДО ТЯЛО С РАВНИННИ ЕЛЕМЕНТИ

Разработени са различни формулировки на равнинни тела за ФАЦК от различни автори [3,6]. Всички от тях използват **2D** елемент с абсолютен централен радиус вектор и наклон като обобщени координати (фиг.3).

$$(10) \quad \mathbf{q} = \{\mathbf{r}^T, \tau_1^T, \tau_2^T\}^T$$



Фиг.3 Твърдо тяло с равнинен елемент

В разработка [12] съединенията на твърдото тяло и равнинен елемент са самолирани чрез използването на техниката на ДАУ (1). Тази работа в началото се обръща към този проблем като свободно от ограничения.

Ние използваме апроксимирана матрица от направляващи косинуси, съставена от почти ортонормални (тангенциални) вектори:  $\mathbf{A} \approx [\tau_1, \tau_2, \tau_3]$  където  $\tau_3 = \tilde{\tau}_1 \tilde{\tau}_2$  е нормален вектор. Кососиметричният тензор на ъгловата скорост  $\tilde{\omega} = \dot{\mathbf{A}}\mathbf{A}^T = \dot{\tau}_1 \tau_1^T + \dot{\tau}_2 \tau_2^T + (\tilde{\tau}_1 \dot{\tau}_2 - \tilde{\tau}_2 \dot{\tau}_1) \tau_3^T$  и матрицата  $\Phi = \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \rho_1^* \mathbf{I} - \rho_3^* \tilde{\tau}_2 & \rho_2^* \mathbf{I} + \rho_3^* \tilde{\tau}_1 \end{bmatrix}$  са намерени после. Параметъра  $\rho_k^* = \tau_k^T \rho$  съответства на местни компоненти на радиус вектора  $\rho$  за точка от тялото.

След някои математически действия получаваме уравнението за движението на тялото чрез зависимости (9) като:

(11)

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} m\mathbf{I} & & & & \\ m(\rho_1 \mathbf{I} + \rho_3 \tilde{\tau}_2) & I_{11} \mathbf{I} - I_{33} \tilde{\tau}_2 \tilde{\tau}_2 & & & \\ m(\rho_2 \mathbf{I} - \rho_3 \tilde{\tau}_1) & I_{11} \mathbf{I} - I_{13} \tilde{\tau}_1 - I_{23} \tilde{\tau}_2 + I_{33} \tilde{\tau}_1 \tilde{\tau}_2 & I_{22} \mathbf{I} - I_{33} \tilde{\tau}_1 \tilde{\tau}_1 & & \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{Q}^{\text{inert}} = \begin{bmatrix} m\rho_3 \mathbf{I} & \\ I_{13} \mathbf{I} + I_{33} \tilde{\tau}_2 & \tilde{\tau}_1 \dot{\tau}_2 \\ I_{23} \mathbf{I} - I_{33} \tilde{\tau}_1 & \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{Q}^{\text{grav}} = \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \\ \rho_1 \mathbf{I} + \rho_3 \tilde{\tau}_2 & \\ \rho_2 \mathbf{I} - \rho_3 \tilde{\tau}_1 & \end{bmatrix} \mathbf{m}\mathbf{g}$$

Тук  $\rho_k$  са компоненти на радиус вектора на масовия център в същото време,  $I_{ij}$  са компоненти на инерционния тензор на тялото в координатната система с  $\tau_1, \tau_2, \tau_3$ .

#### 5. МОДЕЛ НА ЕЛАСТИЧНО ТЯЛО

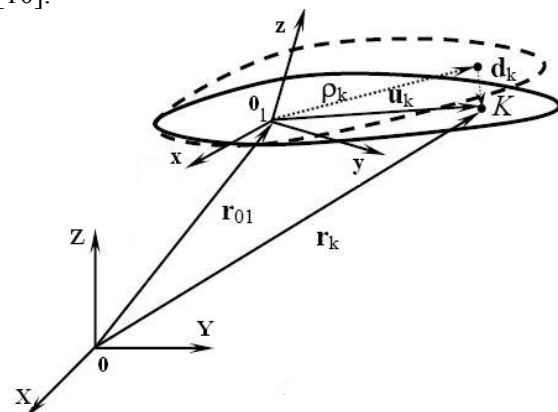
##### 5.1. Математичен модел

Математичният модел на еластично тяло се изгражда с използването на комплекс от следните методи:

- метод на подсистемите
- метод на присъединени координатни системи
- МКЕ
- метод на свързани подструктури.

Интерес представлява създадения метод на центровите оси в еласто динамиката на манипулационни системи [1].

Всяко еластично тяло се разглежда като отделна подсистема. Еластичната подсистема може да взаимодейства с другите подсистеми на обекта като цяло, в това число еластични, чрез различни силови елементи и шарнири [10].



Фиг.4 Схема на глобална и присъединена координатни системи.

Кинематиката на точки от еластичното тяло се описва с прилагането на метода на присъединена координатна система, относно която се строят съотношения за еластичните деформации (премествания). Положението  $\mathbf{r}_k$  на произволна точка  $\mathbf{K}$  на деформираното тяло в глобалната координатна система се определя със следната зависимост (фиг. 4):

$$(12) \quad \mathbf{r}_k = \mathbf{r}_{01} + \mathbf{A}_{01}(\rho_k + \mathbf{d}_k)$$

където  $\mathbf{r}_{01}$  – радиус вектор на началото на присъединената координатна система ( $xyz$ ) спрямо глобалната координатна система ( $XYZ$ ),  $\mathbf{A}_{01}$  - матрица на завъртането,  $\rho_k$  - радиус вектор на точка  $\mathbf{K}$  от недеформираното тяло в присъединената координатна система ( $xyz$ ), вектор  $\mathbf{d}_k$  – преместване на точка  $\mathbf{K}$  от еластичната деформация на тялото.

Еластичните свойства на телата в присъединената координатна система се описват с МКЕ.

Малките еластични деформации (премествания) се представят като сума  $\mathbf{H}$  на допустимите форми на еластичното тяло:

$$(13) \quad \mathbf{q} = \sum_{j=1}^n \mathbf{h}_j \mathbf{w}_j = \mathbf{H} \mathbf{w},$$

където:  $\mathbf{q}$  – възлови степени на свобода на еластичното тяло;  $\mathbf{h}_j$  - допустима форма;  $\mathbf{w}_j$  - модулна координата, определяща еластичните премествания, съответстващи на  $j$ -тата форма.

Матрицата  $\mathbf{H}$  се нарича модална матрица.

За построението на модалната матрица се използва комбинация от статически и собствени форми на еластичното тяло, определяни в съответствие с методите на свързаните подструктури (Крейг-Бемтон) [11]. Методът включва четири етапа:

1 - избор на интерфейсни (външни) възли на системата на крайните елементи (КЕ)

2 - последователно изчисление на статическите форми, представляващи собствените форми на деформация от единично преместване по направление на една от степените на свобода в интерфейсните възли при неподвижност на останалите възли

3 - изчисление на собствените форми при неподвижни интерфейсни възли

4 - изчисление на обобщените матрици на масите и твърдостите, ортогонализацията на статическите и собствените форми.

#### **Избор на интерфейсни възли**

Еластичната подсистема може да взаимодейства с другите подсистеми на изследвания обект чрез шарнири и силови елементи. Желателно е всяка шарнирна точка или точка на присъединяване на силов елемент да съответства възел от мрежата на подсистемата по МКЕ. В качеството на интерфейсни възли се избират възлите, съответстващи на шарнирните точки и точките на присъединяване на силовите елементи. Такъв подход позволява коректно съставяне на уравненията на връзката в шарнирите и достатъчно точно описва еластичните деформации (премествания), влияещи на големината на силите в силовите елементи.

Интерфейсните възли е необходимо да бъдат избрани така, че при изчисляването на всяка статическа форма да се обезпечават неподвижност на подсистемата.

#### **Изчисляване на статическите форми**

Броят на статическите форми е равен на броя на интерфейсните степени на свобода.

Еластичната подсистема се закрепва в интерфейсните възли. В хода на процедурата на изчисление всяка степен на свобода в интерфейсните възли последователно се подлагат на единично преместване (единично завъртане), при което останалите интерфейсни степени на свобода остават закрепени.

#### **Изчисляване на собствените форми**

Собствените форми на еластичната подсистема се явяват резултат от решението на зависимостта:

$$(14) \quad (\mathbf{C} - \lambda \mathbf{M}) \mathbf{u} = \mathbf{0}$$

където  $\mathbf{C}$  – матрица на коравините;  $\mathbf{M}$  – матрица на масите;  $\lambda$  - собствено значение;  $\mathbf{u}$  – собствен вектор.

Ако матрицата има пълен ранг, уравнение (14) има  $N$  решения, където  $N$  е броят на незакрепените възли от степените на свобода. Масовата матрица на еластичната подсистема може да бъде формирана на основата на функциите на формите на КЕ, или има диагонална форма като следствие от разпределението на масите по възлите на мрежата на КЕ. Броят на собствените форми като правило съответства на ниските собствени честоти.

#### **Изчисляване на обобщената матрица, ортогонализация на формите**

Използвайки модалната матрица  $\mathbf{H}$  се строят обобщените матрици на масите и коравините на еластичните подсистеми:

$$(15) \quad \bar{\mathbf{M}} = \mathbf{H}^T \mathbf{M} \mathbf{H}, \quad \bar{\mathbf{C}} = \mathbf{H}^T \mathbf{C} \mathbf{H}$$

където:  $\bar{\mathbf{M}}$  – обобщена матрица на масите,  $\bar{\mathbf{C}}$  – обобщена матрица на коравините.

Заключителният етап от подготовката на набора от форми се явява ортогонализацията на стълбовете на модалната матрица на основата на решението на обобщените проблеми на собствените значения с обобщените матрици на масите и твърдостите.

$$(16) \quad (\bar{\mathbf{C}} - \lambda \bar{\mathbf{M}}) \bar{\mathbf{y}} = \mathbf{0}$$

Преобразуването на набора от форми се извършва на основата на зависимостта:

$$(17) \quad \bar{\mathbf{H}} = \mathbf{H} \bar{\mathbf{Y}}$$

Основното преимущество на такъв подход се явява диагоналната форма на обобщената матрица, което позволява съкращаване до минимум на времето за интегриране на уравненията на движение на еластичните подсистеми.

Другата цел на преобразуванията се явява изключване на формите, съответстващи на движението на еластичните подсистеми като твърди тела. Изпълнението на това условие е необходимо, доколкото движението на подсистемите като твърди тела се описва от присъединената координатна система. На твърдотелните форми съответстват нулеви собствени стойности от спектъра на решението на (17).

## 5.2. Моделиране динамиката на еластични тела

Моделирането на динамиката на еластични тела в състава на обекта включва следните основни етапи:

- 1) описание на еластичните тела в рограма с МКЕ;
- 2) избор на интерфейсни възли, изчисляване на статически и собствени форми на еластичните тела в съответствие с метода на свързаните подструктури (Крейг-Бемтон);
- 3) обработка на данни за построението на еластичните подсистеми;
- 4) включване на еластичните подсистеми в състава на модела на обекта за изследване;
- 5) моделиране (интегриране, линеен анализ).

## 6. МОДЕЛИРАНЕ НА ЕЛЕМЕНТИ ОТ ПОДВИЖЕН ЖЕЛЕЗОПЪТЕН СЪСТАВ (ПЖПС)

Създаването на модел на релсов екипаж в основни черти съвпада с разработването на модел на система от абсолютно твърди тела, свързани посредством шарнири и силови елементи. Обикновено при моделирането на релсов екипаж за абсолютно твърди тела се считат коша, рамата на талигата, колоосите, буксите и др.

При изследване динамиката на движението на ПЖПС базовата координатна система (БКС), относно която се изследва движението удовлетворява следните стандартни изисквания:

- оста  $Z$  е вертикална, ос  $X$  е по направление на движението на екипажа
- началото на координатната система е разположено на нивото на осите на колоосите в положение на равновесно състояние и има нулева стойност на координатата  $Z$ .

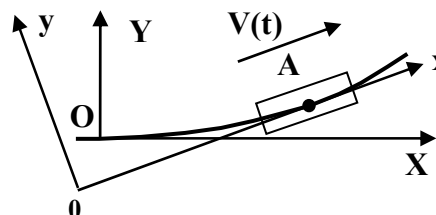
При моделиране динамиката могат да бъдат избрани два различни типа базова координатна система:

- неинерционна
- инерционна.

Тези базови координатни системи се различават при движението на екипажа в крива (фиг.5) инерционната БКС е фиксирана по отношение на земята ( $OXY$  на фиг.5) неинерционната БКС ( $Oxy$  на фиг.5) съвпада с инерционната в началния момент от време и по направление движението на екипажа в преходна крива. При движение на екипажа в крива, оста  $Ox$  е по направление на допирателната към кривата в положение, съответстващо на центъра на тежестта на коша, т.е. оста  $Ox$  се премества по централната линия на кривата в хоризонталната равнина „следейки“ екипажа. Ако в началния момент от време координатата на центъра на тежестта на коша  $X = 0$ , то при движение координатата  $X$  е равна на пътя, изминат от екипажа.

В началния момент от време двата типа БКС съвпадат. Препоръчва се използването на инерционна БКС:

- за модели, включващи няколко екипажа (подвижен състав, състоящ се от повече от 1 локомотил или 1 вагон);
- при движение на един релсов екипаж в крива с малък радиус [2].



Фиг.5 Схема на базови координатни системи при изследване динамиката на движението на ПЖПС

При моделирането на ПЖПС в съставянето на модела е необходимо включването и на еластични тела, извършващи произволни пространствени премествания. При това еластичните премествания за сметка на деформациите се предполагат за малки в координатната система свързани с тялото и могат да бъдат адекватно описани чрез МКЕ, използващи геометричната линейна теория.

Такъв подход позволява уточняване на резултатите от твърдотелното моделиране. Той може да бъде използван например за изследване вибрациите на коша или рамата на железопътен екипаж при движение с отчитане въздействията от оборудването и неравностите на пътя. Също така, област на приложение е и моделиране на механизми с отчитане на еластични звена, извършващи геометрични нелинейни движения.

Моделът на локомотив като съставен обект се състои от кош и 2 включени подсистеми – талиги. Талигата съдържа 3 подсистеми – колоосно-двигателен блок, едно тяло – рама и елементите от централното ресорно окачване. Колоосно-двигателният блок съдържа една включена подсистема – колоос (стандартна подсистема), двигател, силови елементи от буксовото ресорно окачване (пружини, демпфери, еластични водачи) зъбни предавки.

Описването на обекта в дадения случай протича в три етапа:

Етап 1: Създаване на колоосно-двигателен блок, в който се включва една стандартна подсистема – колоос.

Етап 2: Създаване на подсистемата талига, в която се включват 2 пъти или 3 пъти подсистемата колоосно-двигателен блок (в зависимост от типа на локомотива).

Етап 3: Създаване на модела локомотив, в който се включва 2 пъти подсистемата талига.

Всяка от включените подсистеми трябва да е достъпна за редактиране, което позволява отчитането на редица особености.

#### ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Моделирането на съединението на твърди и еластични тела може да бъде направено като свободен от ограничение проблем. Техниката показана в настоящата разработка може да бъде приложена за всякакви обекти, съдържащи твърди и еластични тела.

В разработката са отразени основните етапи и изисквания относно създаването на модел за изследване динамиката на движение на релсов екипаж като система от абсолютно твърди тела и като система от твърди и еластични тела със съответни връзки.

#### ЛИТЕРАТУРА:

[1] Колев П. Метод на центровите оси в еласто динамиката на манипулационни системи., дис. тр. за д.т.н., София, 2003.

[2] Куценко С. М. и кол., Динамика установившегося движения локомотивов в кривых, X. Виша школа, 1975

[3] Dmitrochenko O.N., Pogorelov D.Yu.: Generalization of plate finite elements for absolute nodal coordinate formulation. *Multibody System Dynamics* 10, No.1, Special issue 'Virtual Nonlinear Multibody Systems', Kluwer, Dordrecht, 2003.

[4] Dmitrotchenko O.N.: Efficient simulation of rigid-flexible multibody dynamics: Some implementations and results. *Preprints of NATO ASI on Virtual Nonlinear Multibody Systems*, Vol. 1, W. Schielen and M. Valásek (eds.). – Czech Technical University in Prague, Prague, 2002.

[5] Geradin M., Cardona A., Doan D.B., Duysens J.: Finite element modeling concepts in multibody dynamics. *Computer-Aided Analysis of Rigid and Flexible Mechanical Systems*, M.S. Pereira and J.A.C. Ambrosio (eds.), Kluwer, Dordrecht, 1994.

[6] Mikkola A.M., Shabana A.A.: A new plate element based on the absolute nodal coordinate formulation. *Proceedings of ASME 2001 DETC*, Pittsburgh, 2001.

[7] Pogorelov D.: Differential-algebraic equations in multibody system modeling. *Num. Alg.* 19, Baltzer, 1998.

[8] Shabana A.A.: Flexible multibody dynamics: Review of past and recent developments. *Multibody System Dyn.* 1, 1997.

[9] UMLAB Моделирование динамики железнодорожных экипажей <http://www.umlabor.ru>

[10] UMLAB Моделирование упругих тел <http://www.umlabor.ru>

[11] Yoo W.-S., Lee J.-H., Park S.-J., Sohn J.-H., Dmitrochenko O., Pogorelov D.: Large oscillations of a thin cantilever beam: Physical experiments and simulation using absolute nodal coordinate formulation. *Journal of Nonlinear Dynamics*, Vol. 34, Issue 1, Oct 2003, 2003

[12] Yoo W.-S., Lee J.-H., Park S.-J., Sohn J.-H., Pogorelov D.Yu., Dmitrochenko O.N.: Large Deflection Analysis of a Thin Plate: Computer Simulations and Experiments. *Multibody System Dynamics* 11, No.2, 2003.

## MODELING OF ROLLING-STOCK WITH RIGID AND ELASTIC BODIES

**Dobrinka ATMADZHOVA**

*Todor Kableshkov Higher School of Transport, Department of Transport Equipment  
Geo Milev str.158, Sofia 1574,  
BULGARIA*

**Abstract:** The paper present mechanical systems of both rigid and elastic bodies. Differential-algebraic equations of their motion and a technique of elimination of the algebraic part to obtain ordinary differential equations are discussed. The fundamental stages and rules for simulation of rolling-stock with rigid and elastic bodies are explained.

**Key words:** rolling-stock, modeling.