Механика Транспорт Комуникации

ISSN 1312-3823 (print)
ISSN 2367-6620 (online)
том 24, брой 1, 2026 г.

Научно списание **http://www.mtc-aj.com** **статия № 2782**

ПРИНУДЕНИ ТРЕПТЕНИЯ НА ТРЪБА, ПРОВЕЖДАЩА ФЛУИД И ЛЕЖАЩА ВЪРХУ ВИНКЛЕРОВА ЕЛАСТИЧНА ОСНОВА

Димитър Лолов, Светлана Лилкова-Маркова
dlolov@yahoo.com, lilkovasvetlana@gmail.com

УАСГ, бул. Христо Смирненски“ 1, София
РЕПУБЛИКА БЪЛГАРИЯ

Ключови думи: *тръба, флуид, метод на Грийн, Винклерова еластична основа, принудени трептения*

Резюме: *В настоящата статия се изследват принудените трептения на тръба, провеждаща флуид под действието на напречна на оста на тръбата хармонична сила. Тръбата лежи върху Винклерова еластична основа и е запъната в левия си край. За решението на задачата е използван методът на Грийн. Извършени са числени изследвания.*

ВЪВЕДЕНИЕ

Тръбите с протичащ флуид намират широко приложение в различни области на индустрията. Редица учени извършват изследвания във връзка с динамичната устойчивост на системата тръба–флуид. Разглеждат се различни случаи на подпиране на тръбите и се определят напречните премествания на оста тръбата, критичната скорост на флуида и други. Един от най-видните изследователи в тази област е M. Paidoussis [1], [2].

В [3] Hu Ding и J. C. Ji разглеждат трептенията на тръби с протичащ флуид. Показани са и подходи за контролиране на тези трептения – пасивен контрол, активен контрол, полуактивен контрол и оптимизация за намаляването им.

K.R. Chellapilla и H.S. Simha в [4] показват приложение на метода на Гальоркин за определяне на критичната скорост на протичащия флуид, когато тръбата лежи върху основа на Пастернак. Решението е извършено при две стойности на коравината на основата.

В настоящата статия са изследвани принудените трептения под действие на вертикална хармонична сила върху тръба, лежаща върху Винклерова еластична основа

ОПИСАНИЕ НА МЕТОДИКАТА

Диференциалното уравнение, описващо свободните напречни трептения на тръба, провеждаща флуид и лежаща върху Винклерова еластична основа и натоварена с напречни на оста концентрирани сили, има вида:

$$EI\frac{\partial^4 w}{\partial x^4}+m_f V^2\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+2m_f V\frac{\partial^2 w}{\partial x\,\partial t}+\left(m_f+m_p\right)\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}+k_w w=F\left(x,t\right) \tag{1}$$

В (1) с $w(x,t)$ е означена функцията на напречните премествания на точките от оста на гредата, x е надлъжната координатата по оста на гредата, а t е времето. С k_w е означена коравината на Винклеровата еластична основа. $F(x,t)$ е концентрирана, напречна на оста на тръбата сила. Физичните и геометричните параметри на системата тръба-флуид са:

- Характеристики на тръбата: m_p - маса за единица дължина на тръбата, L - дължина на тръбата, I - инерционен момент на напречното сечение на тръбата, E - модул на линейна еластичност на материала, от който е изготвена тръбата (модул на Юнг);
- Характеристики на флуида: m_f - маса на флуида за единица дължина на тръбата, V - скорост на транспортирания флуид.

Уравнение (1) е изведено при пренебрегване на дисипацията и демпфирането. То е получено на база на следните хипотези [1], [2]:

А) Транспортираният флуид се приема за несвиваем, тежък и невискозен. Следователно, скоростта му е една и съща във всяка точка от напречното сечение.

Б) В сила е хипотезата на Бернули за равнинност на сеченията преди и след деформацията.

В) За материала на тръбата е в сила законът на Хук.

Г) Размерите на напречното сечение на тръбата са значително по-малки от нейната дължина.

Д) Пренебрегва се осовата деформация на тръбата.

Всеки от членовете в уравнение (1) има следния физически смисъл:

А) Центробежна сила, породена от потока на флуида в деформираната тръба:

(2) $$m_f V^2 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}.$$

Б) Кориолисова сила:

(3) $$2 m_f V \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial t},$$

В) Инерционна сила:

(4) $$\left(m_f + m_p\right)\frac{\partial^2 w}{\partial t^2},$$

Г) Реакция на Винклеровата еластична основа

(5) $$k_w w$$

В настоящото изследване силата $F(x,t)$ се приема за хармонична функция на времето t:

(6) $$F(x,t) = F_j \delta\left(x - x_j\right)\sin\left(\omega_j t\right),$$

където F_j е амплитудната стойност на силата, ω_j е принудената честота, а $\delta\left(x - x_j\right)$ - функцията на Дирак.

За удобство уравнение (6) се записва в комплексна форма [5]:

(7) $$F(x,t) = F_j \delta\left(x - x_j\right) e^{i\left(\omega_j t - \pi/2\right)},$$

За решението на диференциално уравнение (1) се използва методът на Грийн. Този метод е широко използван за решение на частни диференциални уравнения.

Функцията на Грийн е решение на уравнение (1) в резултат на приложен върху тръбата единичен импулсен товар. Това уравнение може да се запише в следната форма:

(8) $\Re\, G\left(x,x_j\right)=\delta\left(x-x_j\right)$,

където $\Re$ е линеен диференциален оператор, а с $G\left(x,x_j\right)$ е означена функцията на Грийн.

Въвежда се функцията $h\left(x\right)$, която показва в кои точки от тръбата са приложени концентрираните сили.

(9) $h\left(x\right)=\sum_j F_j\,\delta\left(x-x_j\right)$.

Решението на диференциалното уравнение (1) съгласно метода на Грийн е [5]:

(10) $w\left(x,t\right)=w\left(x\right)e^{i\left(\omega_j t-\pi/2\right)}=\left[\int_0^L G\left(x,x_j\right)h\left(x\right)dx_j\right]e^{i\left(\omega_j t-\pi/2\right)}$.

След заместване на (9) в (10) се получава:

(11) $w\left(x,t\right)=\left[\int_0^L G\left(x,x_j\right)\sum_j F_j\,\delta\left(x-x_j\right)dx_j\right]e^{i\left(\omega_j t-\pi/2\right)}$.

След преобразувания:

(12) $w\left(x,t\right)=\sum_j F_j\left[\int_0^L G\left(x,x_j\right)\delta\left(x-x_j\right)dx_j\right]e^{i\left(\omega_j t-\pi/2\right)}$.

Отчита се:

(13) $\int_0^L G\left(x,x_j\right)\delta\left(x-x_j\right)dx_j=G\left(x,x_j\right)$

В резултат на това изразът (12) добива вида:

(14) $w\left(x,t\right)=\sum_j F_j\,G\left(x,x_j\right)e^{i\left(\omega_j t-\pi/2\right)}$.

Замества се (14) в (1) и се получава:

(15) $w^{IV}\left(x\right)+a\,w^{II}\left(x\right)+ib\,w^{I}\left(x\right)-c\,w\left(x\right)=\dfrac{F_j\,\delta\left(x-x_j\right)}{EI}$,

където:

(16) $a=\dfrac{m_f V^2}{EI}$;

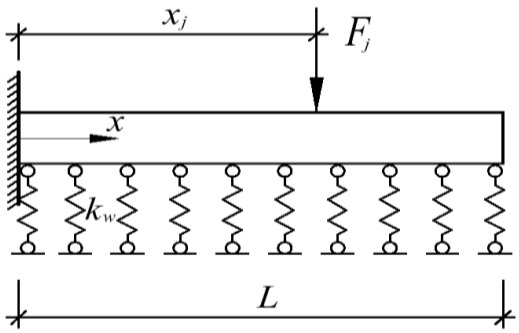
(17) $b=\dfrac{2m_f V\omega_j}{EI}$;

(18) $c=\dfrac{\left(m_f+m_p\right)\omega_j^2-k_w}{EI}$.

Решението на уравнение (15) е:

(19) $w\left(x\right)=\dfrac{F_j}{EI}G\left(x,x_j\right)$.

В настоящата работа се изследва тръба, запъната в левия си край и лежаща върху Винклрова еластична основа (Фиг.1).



Фиг. 1. Статическа схема на изследваната тръба

Функцията на Грийн за тръбата от Фиг.1 се получава чрез трансформации по Лаплас и чрез отчитане на граничните ѝ условия [5]:

(20) $$G\left(x,x_j\right)=H\left(x-x_j\right)\psi\left(x-x_j\right)+\left[\psi^{III}\left(x\right)+a\psi^{I}\left(x\right)+ib\psi\left(x\right)\right]w\left(0\right)+.$$
$$+\left[\psi^{II}\left(x\right)+a\psi\left(x\right)\right]w^{I}\left(0\right)+\psi^{I}\left(x\right)w^{II}\left(0\right)+\psi\left(x\right)w^{III}\left(0\right)$$

В (20) с $H\left(x-x_j\right)$ е означена функцията на Хевисайд, а помощната функция $\psi\left(x\right)$ се дефинира, както следва:

(21) $$\psi\left(x\right)=\sum_{k=1}^{4}\frac{e^{\lambda_k x}}{4\lambda_k^3+2\lambda_k a+ib}.$$

В (21) λ_k са корените на характеристичното уравнение на (15).

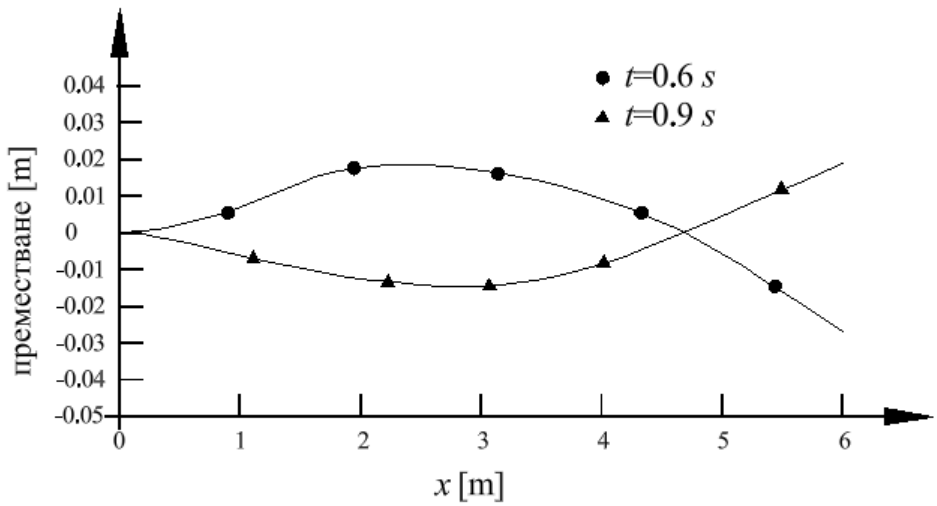
Окончателно, за функцията на Грийн се получава:

(22) $$G\left(x,x_j\right)=H\left(x-x_j\right)\psi\left(x-x_j\right)+\frac{\psi^{II}\left(L\right)\psi^{III}\left(L-x_j\right)-\psi^{III}\left(L\right)\psi^{II}\left(L-x_j\right)}{\psi^{III}\left(L\right)^2-\psi^{II}\left(L\right)\psi^{IV}\left(L\right)}\psi^{I}\left(L\right)+.$$
$$+\frac{\psi^{IV}\left(L\right)\psi^{II}\left(L-x_j\right)-\psi^{III}\left(L\right)\psi^{III}\left(L-x_j\right)}{\psi^{III}\left(L\right)^2-\psi^{II}\left(L\right)\psi^{IV}\left(L\right)}\psi\left(L\right)$$

ЧИСЛЕНИ ИЗСЛЕДВАНИЯ

В настоящата статия се изследва стоманена тръба със статическа схема, показана на Фиг.1. Тръбата е с дължина $L=6m$. Коравината ѝ на огъване е $EI=3001kNm^2$. Транспортираният флуид е вода. Коравината на Винклеровата еластична основа е $k_w=200kPa$. Амплитудната стойност на напречната сила $F_j=36kN$, а принудената честота на трептене е $\omega_j=80s^{-1}$.

На Фиг.2 е показана еластичната линия на тръбата при скорост на транспортирания флуид $V=10m/s$ за стойности на $t=0.6s$ и $t=0.9s$.



Фиг. 2. Еластична линия на изследваната тръба за $t = 0.6\,s$ **и** $t = 0.9\,s$

ИЗВОДИ

В настоящата работа се изследва динамиката на запъната греда, лежаща върху Винклерова еластична основа и натоварена с напречна динамична сила, която е хармонична функция на времето t. За решението на проблема е използвана функцията на Грийн. Предимството на метода на Грийн пред широко прилагания метод на Гальоркин е, че не е необходимо предварително да се определят собствените форми на тръбата със стационарен флуид.

ЛИТЕРАТУРА:

[1] Paidoussis M. Fluid-structure Interactions: Volume I Slender Structures and Axial Flow. Academic Press, ISBN-10: 0123973122, 2013

[2] Paidoussis M. Fluid-structure Interactions: Volume II Slender Structures and Axial Flow, Academic Press, ISBN-10: 0123973351, 2016

[3] Ding H, Ji J.C. “Vibration control of fluid-conveying pipes: a state-of-the-art review”, Applied Mathematics and Mechanics (English edition), Vol. 44(9), pp. 1423-1456, 2023.

[4] Chellapilla K.R., Simha H.S. “Critical velocity of fluid-conveying pipes resting on two-parameter foundation“, Journal of Sound and Vibration, Vol. 302, pp. 387-397, 2007.

[5] Tembely M. “Derivation of an analytical solution of a forced cantelivered tube conveying fluid”. A preprint, 2024

FORCED VIBRATIONS OF A FLUID-CONVEYING PIPE RESTING ON A WINKLER ELASTIC FOUNDATION

Dimitar Lolov, Svetlana Lilkova-Markova
dlolov@yahoo.com, lilkovasvetlana@gmail.com

UACEG, 1 Hristo Smirnenski Blvd, Sofia.
BULGARIA

Key words: *pipe, fluid, Green's function method, Winkler elastic foundation, forced vibrations*

Abstract: *In the present paper, the forced vibrations of a fluid-conveying pipe subjected to a transverse harmonic force are investigated. The pipe rests on a Winkler elastic foundation and is clamped at its left end. The Green's function method is used to solve the problem. Numerical investigations are carried out.*