Механика
Транспорт
Комуникации
Научно списание

ISSN 1312-3823
брой 1, 2008 г.
статия № 0219
http://www.mtc-aj.com

МОДЕЛИ, АЛГОРИТМИ И ГРАФИЧНИ ИНТЕРПРЕТАЦИИ НА ПОЕЛЕМЕНТНОТО РЕЗЕРВИРАНЕ В ИНФОРМАЦИОННИ ОТКАЗОУСТОЙЧИВИ СИСТЕМИ

Мария Христова
mhristova@vtu.bg

Висше транспортно училище "Тодор Каблешков", катедра "Математика и информатика", ул. "Гео Милев" 158, София 1574, БЪЛГАРИЯ

Ключови думи: *надеждност, отказоустойчивост, резервиране, излишък, показатели за надеждност, невъзстановими системи*

Резюме: *Предмет на аналитично изследване в тази статия са информационни системи с многократно резервирани елементи. Изведени са формули за случаите с горещо и със студено резервиране. Предложен е алгоритъм за обработка и изчисление на показателите на надеждност. Направен е компаративен анализ на поелементно и системно резервиране.*

1. ПОСТАНОВКА НА ПРОБЛЕМА

В транспорта, банкирането, охранителната дейност, военното дело и др. отрасли се използват информационни системи с повишена надеждност. Тя се постига чрез един от следните три подхода:

- *Използване на високонадеждни градивни елементи*;
- *Ускорено възстановяване на работоспособността след отказ*;
- *Използване на излишък.*

Настоящото изследване е свързано с третия подход.

Както е известно [1], **излишък** означава *работоспособни ресурси, в повече от необходимите за функциониране на системата, чрез които работоспособността ѝ се запазва посредством маскиране и толериране на грешките и неизправностите на градивните ѝ елементи.*

Излишъкът може да е структурен (апаратен или програмен), информационен, времеви, енергиен, функционален, или излишък по натоварване. Според това, дали се използва при нормална работа или не, излишъкът може да е:

- *статичен* (натоварен резерв, постоянно резервиране) като например паралелни системи, мрежи с кръгова (рингова) топология, структури «M от N» и др., или

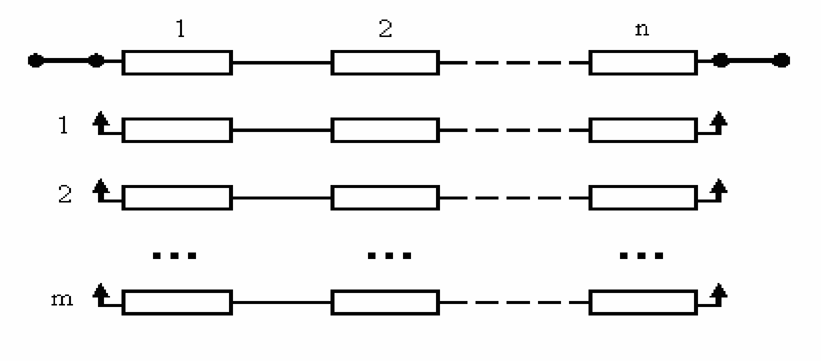
▪ *динамичен* излишък (ненатоварен резерв, резервиране чрез заместване).

Структурният излишък, от своя страна, може да е *студен* или *горещ* (stand-by) резерв, който работи едновременно с основния, но се използва едва след отказа на последния.

Последователна по надеждност е структура, която е работоспособна тогава и само тогава, когато всички елементи, от които е изградена са работоспособни. Тя отказва, ако откаже макар и един неин елемент. Следователно [1]:

(1) $$P(t) = p_1(t)\,p_2(t)...\,p_n(t) = \prod_{i=1}^{m} p_i(t)\,,$$

където $P(t)$ е функцията на надеждност на системата, а $p_1(t),\ p_2(t),...\ p_n(t)$ - вероятността за безотказна работа на елементите.



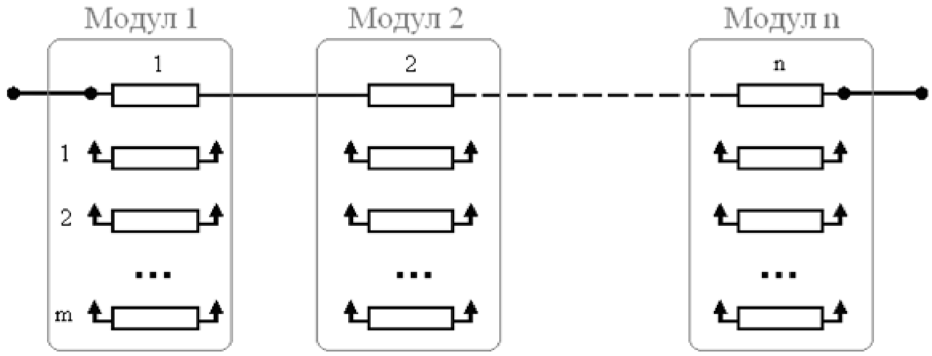
Фиг.1 Последователни структури с поелементно резервиране

Последователните структури се резервират с горещ или студен резерв със същите характеристики. Те са предмет на изследване в авторския труд [4], който е свързан с настоящото изследване и чиито резултати се използват тук.

Паралелна по надеждност е структура, която е работоспособна, когато работи макар и един от съставящите я елементи. Тя отказва тогава и само тогава, когато всички елементи, от които е изградена, откажат.

Ако една последователна система се изгради от структурни единици, представляващи паралелни структури, следва, че всяка от тях ще има по-висока надеждност, защото ще работи докато е изправен и последният от паралелните резервни елементи. В такива случаи се говори за **поелементно резервиране** (фиг.1) на иначе последователната по надеждност система. Това означава, че вместо един се използват няколко еднакви елемента, единият от които работи, а другите са резервни. Например да се подмени отказал резистор, интегрална схема или диод в печатната платка, а не цялата карта. Заместването на отказала печатна платка (карта) в един компютър или контролер, превключване към резервна подпрограма при откриване на софтуерна грешка също са примери за поелементно резервиране.

Предмет на аналитично изследване по-долу са показателите за надеждност на системи от вида на Фиг.2 с многократно резервирани елементи.



фиг.2 Системи с многократно резервирани елементи

Формули за вероятностите за безотказна работа и за отказ на невъзстановимите системи или когато се разглеждат само до първи отказ, са изведени в [1, 2, 3]. Настоящата публикация е продължение на тези и други известни резултати. Тук са моделирани и изследвани и други показатели като честота, интензивност на отказите и математическо очакване на отказ. Направени са изчисления, на базата на които са проведени изследвания и са обобщени изводи за ефективността на различни типове структурно резервиране.

2. РЕЗЕРВИРАНЕ ЧРЕЗ ЗАМЕСТВАНЕ НА НЕВЪЗСТАНОВИМИ СИСТЕМИ

2.1. Моделиране на показателите за надеждност на системи с поелементно „горещо” резервиране.

Както бе отбелязано, в [2] е изведена формула за надеждността на система с поелементно резервиране (фиг.1). Вероятността за безотказна работа на системата е

(2) $$P_S(t) = e^{-n\lambda t}\left[\sum_{i=0}^{m}\left(1-e^{-\lambda t}\right)^i\right]^n,$$

където λ е интензивността на отказите на елементите.

За да се намери честотата на отказите $f_s(t)$ на цялата система с поелементно резервиране се използва установената аналитична зависимост [1, 3], че плътността на разпределение на отработката до отказ е първа производна на функцията на надеждност: $f(t) = -P'(t)$:

$$f_s(t) = \frac{d}{dt}\left\{-e^{-n\lambda t}\left[\sum_{i=0}^{m}\left(1-e^{-\lambda t}\right)^i\right]^n\right\} =$$

$$-\left\{(-n.\lambda)e^{-n\lambda t}.\left[\sum_{i=0}^{m}\left(1-e^{-\lambda t}\right)^i\right]^n + e^{-n\lambda t}n\left[\sum_{i=0}^{m}\left(1-e^{-\lambda t}\right)^i\right]^{n-1}\lambda.e^{-\lambda t}\sum_{i=0}^{m} i.\left(1-e^{-\lambda t}\right)^{i-1}\right\}$$

(3) $$f_s(t) = n\lambda e^{-n\lambda t}\left[\sum_{i=0}^{m}(1-e^{-\lambda})^i\right] - n\lambda e^{-2n\lambda t}\left[\sum_{i=0}^{m} i.\left(1-e^{-\lambda t}\right)^{i-1}\right]$$

По известната формула $f(t) = \lambda(t).P(t)$ за интензивността λ_s(t) на отказите може да бъде намерена зависимостта:

(4) $$\lambda_S(t)=\frac{f_s(t)}{P_S(t)}=\frac{n\lambda\left[\sum_{i=0}^{m}\left(1-e^{-\lambda t}\right)^i-e^{-\lambda t}\sum_{i=0}^{m}i.\left(1-e^{-\lambda t}\right)^{i-1}\right]}{\sum_{i=0}^{m}\left(1-e^{-\lambda t}\right)^i}$$

При извода на тази формула е използвано, че:

$$\left\{\left[\sum_{i=0}^{m}\left(1-e^{-\lambda t}\right)^i\right]^n\right\}'=n.\left[\sum_{i=0}^{m}\left(1-e^{-\lambda t}\right)^i\right]^{n-1}.\left[\sum_{i=0}^{m}\left(1-e^{-\lambda t}\right)^i\right]'.$$

От друга страна:

$$\sum_{i=0}^{m}\left(1-e^{-\lambda t}\right)^i=\left(1-e^{-\lambda t}\right)^0+\left(1-e^{-\lambda t}\right)^1+\left(1-e^{-\lambda t}\right)^2+\ldots+\left(1-e^{-\lambda t}\right)^m,$$

следователно:

$$\left[\sum_{i=0}^{m}\left(1-e^{-\lambda t}\right)^i\right]'=0.\left(1-e^{-\lambda t}\right)^{-1}.\lambda.e^{-\lambda t}+1.\left(1-e^{-\lambda t}\right)^0.\lambda.e^{-\lambda t}+\ldots+m.\left(1-e^{-\lambda t}\right)^{m-1}.\lambda.e^{-\lambda t}=$$

$$=\lambda.e^{-\lambda t}.\sum_{i=0}^{m}i.\left(1-e^{-\lambda t}\right)^{i-1}.$$

Като се замести производната се получава:

$$\left\{\left[\sum_{i=0}^{m}\left(1-e^{-\lambda t}\right)^i\right]^n\right\}'=n.\left[\sum_{i=0}^{m}\left(1-e^{-\lambda t}\right)^i\right]^{n-1}.\lambda.e^{-\lambda t}.\sum_{i=0}^{m}i.\left(1-e^{-\lambda t}\right)^{i-1}.$$

Крайният резултат за интензивността на отказ на система при разделно резервиране чрез заместване с цяла кратност и горещ резерв се получава след поставяне в (4):

(5) $$\lambda_S(t)=n.\lambda.\left[1-\frac{e^{-\lambda t}.\sum_{i=0}^{m}i.\left(1-e^{-\lambda t}\right)^{i-1}}{\sum_{i=0}^{m}\left(1-e^{-\lambda t}\right)^i}\right].$$

2.2. Моделиране на показателите за надеждност на системи с поелементно студено резервиране

Схемата тук е същата, с тази разлика, че резервите в този случай не работят заедно с основната схема, не се износват, а се пускат в действие само след като им дойде реда да толерират отказ. Отработката на ново включения в схемата резерв започва да тече не от нулевия за системата момент, а от момента на отказ на отказалия елемент. Към момента на превключване резервът има нулева отработка. За определяне на функцията на надеждността, специализираната литература [2] предлага да се използва формулата на Пуасон.

На тази основа е изведена вероятността за отказ на паралелната модулна структура със студен резерв [2]:

(6) $$P_S(t)=e^{-\lambda t}\sum_{i=0}^{m}\frac{(\lambda t)^i}{i!}.$$

Като се отчете, че модулите на фиг. 2 са свързани последователно и ако се приеме, че n-те елемента в основната схема и всички техни резерви са еднакви, за вероятността за безотказна работа на система при разделно резервиране чрез заместване и студен резерв се получава:

(7) $$P_S(t)=\left[e^{-\lambda t}\sum_{i=0}^{m}\frac{(\lambda t)^i}{i!}\right]^n .$$

Формулата може да се представи по следния начин:

(8) $$P_S(t)=\left[e^{-\lambda t}\sum_{i=0}^{m}\frac{(\lambda t)^i}{i!}\right]^n=e^{-n\lambda t}.\left[\sum_{i=0}^{m}\frac{(\lambda t)^i}{i!}\right]^n ,$$

Оттук може да се намери системната интензивност на отказите:

(9) $$\lambda_S(t)=-\frac{P_S{'}(t)}{P_S(t)}=-\frac{(-n.\lambda).e^{-n\lambda t}.\left[\sum_{i=0}^{m}\frac{(\lambda t)^i}{i!}\right]^n+e^{-n\lambda t}.n.\left[\sum_{i=0}^{m}\frac{(\lambda t)^i}{i!}\right]^{n-1}.\lambda.\sum_{i=0}^{m-1}\frac{(\lambda t)^i}{i!}}{e^{-n\lambda t}.\left[\sum_{i=0}^{m}\frac{(\lambda t)^i}{i!}\right]^n}=$$

$$=\frac{n.\lambda.\sum_{i=0}^{m}\frac{(\lambda t)^i}{i!}-n.\lambda.\sum_{i=0}^{m-1}\frac{(\lambda t)^i}{i!}}{\sum_{i=0}^{m}\frac{(\lambda t)^i}{i!}}=\frac{n.\lambda.(\lambda t)^m}{m!\sum_{i=0}^{m}\frac{(\lambda t)^i}{i!}}$$

При извеждането е използвано, че:

$$\left\{\left[\sum_{i=0}^{m}\frac{(\lambda t)^i}{i!}\right]^n\right\}'=n.\left[\sum_{i=0}^{m}\frac{(\lambda t)^i}{i!}\right]^{n-1}.\left[\sum_{i=0}^{m}\frac{(\lambda t)^i}{i!}\right]'.$$

Същевременно:

$$\sum_{i=0}^{m}\frac{(\lambda t)^i}{i!}=\frac{(\lambda t)^0}{0!}+\frac{(\lambda t)^1}{1!}+\frac{(\lambda t)^2}{2!}+...+\frac{(\lambda t)^m}{m!},$$

следователно:

$$\left[\sum_{i=0}^{m}\frac{(\lambda t)^i}{i!}\right]'=\frac{1.\lambda^1.t^0}{1!}+\frac{2.\lambda^2.t^1}{2!}+...+\frac{m.\lambda^m.t^{m-1}}{m!}=\frac{\lambda^1.t^0}{0!}+\frac{\lambda^2.t^1}{1!}+...+\frac{\lambda^m.t^{m-1}}{(m-1)!}=\lambda.\sum_{i=0}^{m-1}\frac{(\lambda t)^i}{i!}.$$

Като се замести този израз в производната, се получава:

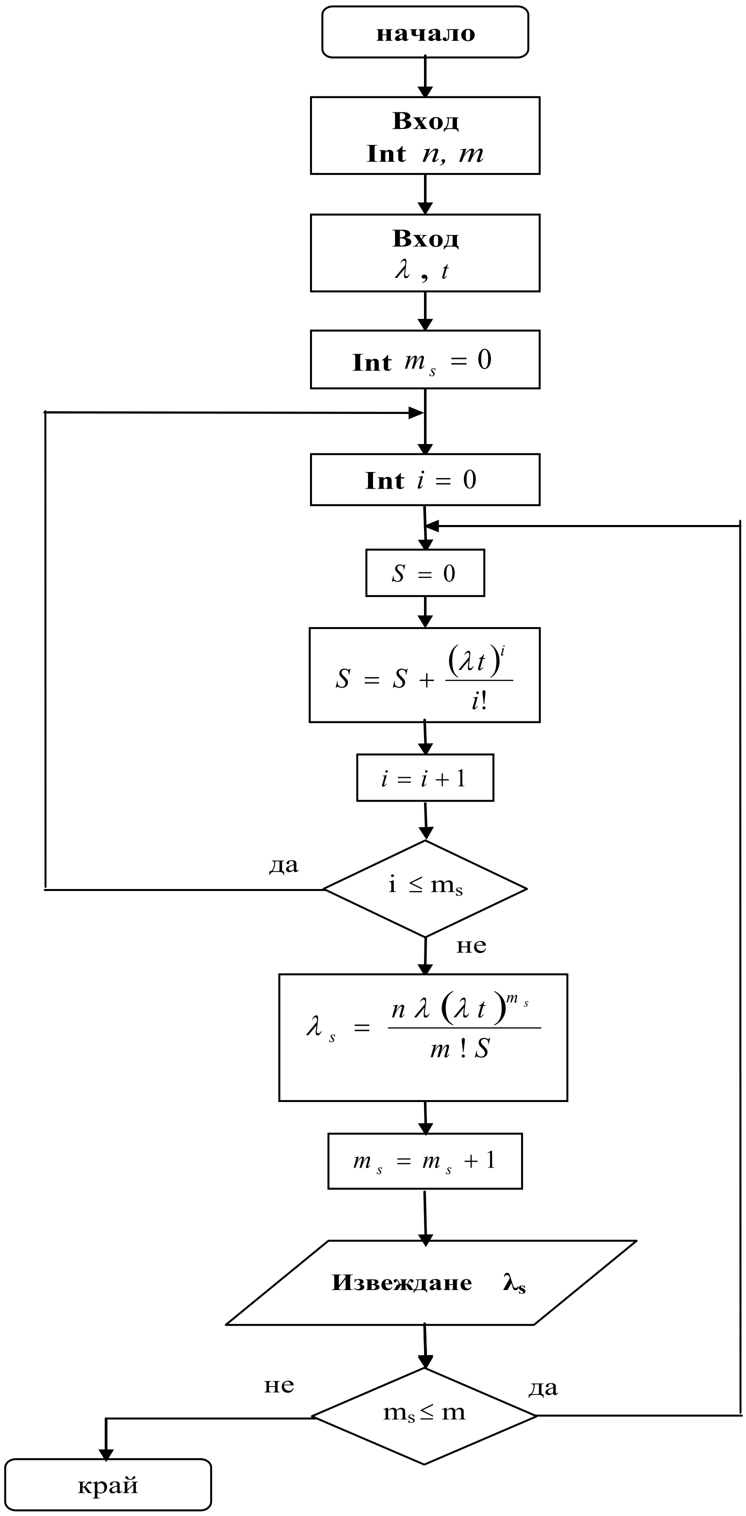
$$\left\{\left[\sum_{i=0}^{m}\frac{(\lambda t)^i}{i!}\right]^n\right\}'=n.\left[\sum_{i=0}^{m}\frac{(\lambda t)^i}{i!}\right]^{n-1}.\lambda.\sum_{i=0}^{m-1}\frac{(\lambda t)^i}{i!}.$$

Окончателният резултат за интензивността $\lambda_S(t)$ на отказите на системата при разделно резервиране със студен резерв се получава след поставяне в (9):

(10) $$\lambda_S(t)=\frac{n\lambda(\lambda t)^m}{m!\sum_{i=0}^{m}\frac{(\lambda t)^i}{i!}}.$$

3. АЛГОРИТЪМ ЗА ИЗЧИСЛЕНИЕ НА ИНТЕНЗИВНОСТТА НА ОТКАЗИТЕ НА СИСТЕМАТА

За изследване на надеждността на резервираната информационна система са съставени алгоритми по така изведените формули. Алгоритъмът, по който е аписана програма за изчисление на интензивността $\lambda_S(t)$ на отказите на системата, е показан на фиг. 3.



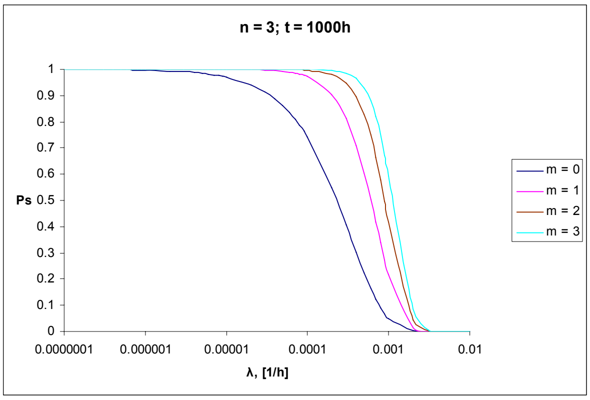
Фиг. 3 Алгоритъм за изчисление на интензивността на отказите на поелементно резервирана информационна система

Въвеждат се стойности на интензивността на елементните откази λ в практически интересни диапазони. Задава се отработката до отказ t. Изчисленията са автоматизирани за 0,1,2...m резервни «пласта», като се всеки пореден m_s елемент в цикъл се извежда резултат.

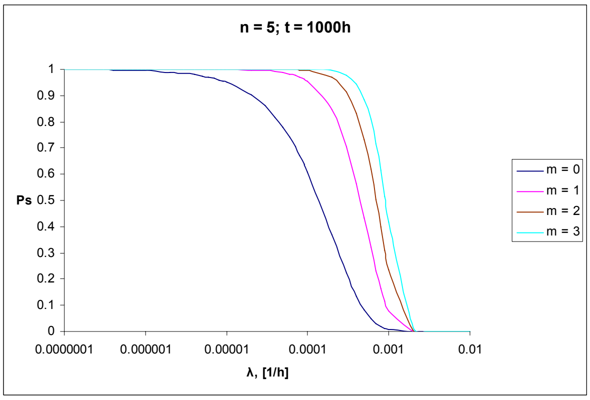
4. ИЗСЛЕДВАНЕ НА ПОЕЛЕМЕНТНО РЕЗЕРВИРАНА СТРУКТУРА

4.1 Изследване на зависимостите при горещо резервиране

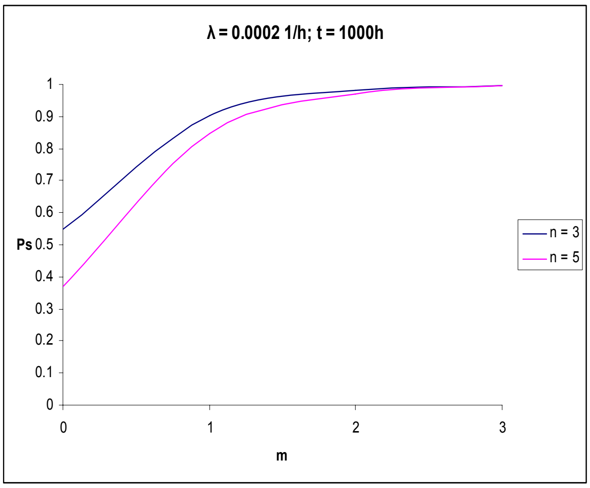
Изследвани са две основни схеми по структурата от фиг.2, които се състоят от $n=3$ и $n=5$ последователни елемента. Всеки от елементите може да е резервиран с $m=$ 0, 1, 2 и 3 елемента, работещи в режим на горещ резерв. Използвана е формула (6) за определяне на функцията на надеждност P_S на поелементно резервираната система. Резултатите са представени на Фиг.4 и Фиг.5. Освен това, за интензивност $\lambda = 0{,}0002\,[1/\mathrm{h}]$ е изследвано (Фиг. 6) изменението на вероятността за безотказна работа на системата в зависимост от дълбочината на резервиране при различен брой елементи в основната схема.



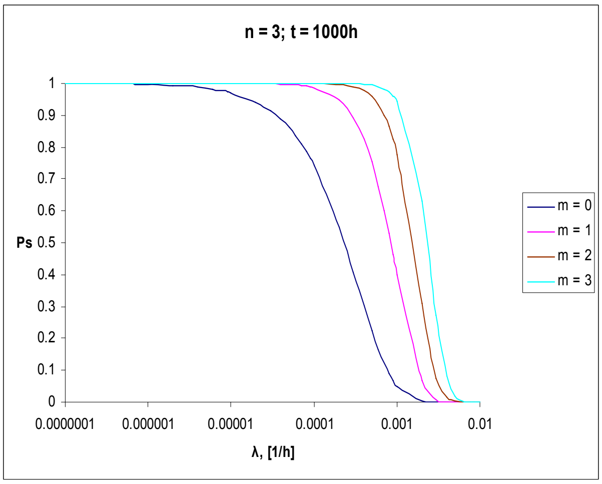
Фиг.4 Разделно резервиране, горещ резерв



Фиг. 5 Разделно резервиране, горещ резерв



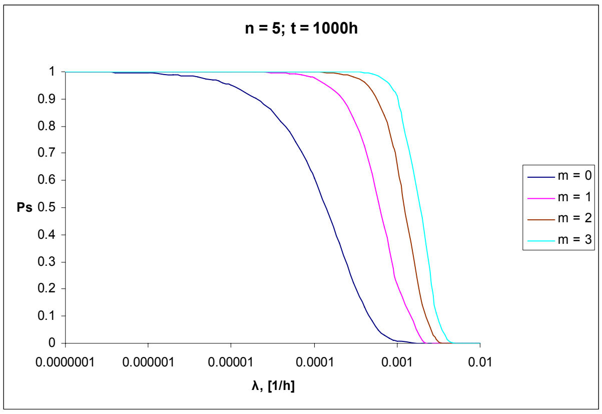
Фиг. 6 Разделно резервиране, горещ резерв



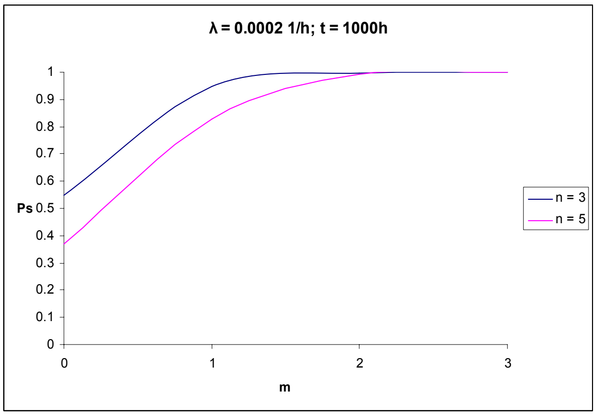
Фиг. 7 Разделно резервиране, студен резерв

4.2 Изследване на зависимостите при студено резервиране

Схемите, съставени от $n = 3$ и $n = 5$ последователно свързани елемента, всеки резервиран с $m =$ 0, 1, 2 и 3 елемента, са изследвани в случай, че резервите се намират в състояние на студен резерв (фиг. 7 и фиг.8).



Фиг.8 Разделно резервиране, студен резерв



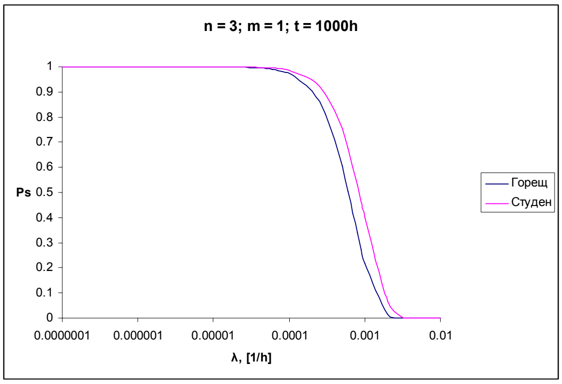
Фиг. 9 Разделно резервиране, студен резерв

По формула (7) е определена вероятността за безотказна работа на системата, при изменение на интензивността на отказите на λ съставните елементи. И отново, при $\lambda = 0{,}0002\,[1/\mathrm{h}]$ за двете схеми е изследвано как се променя системната надеждностна функция P_S в зависимост от дълбочината на резервиране.

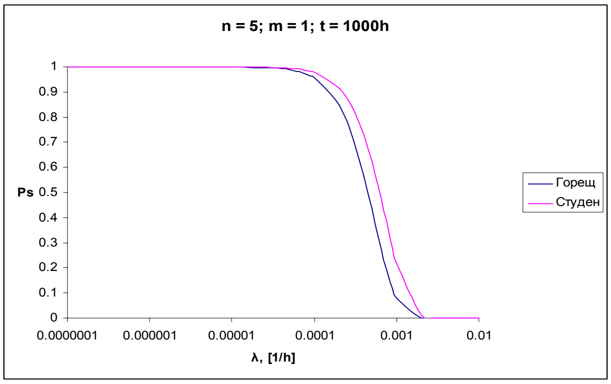
4.3 Сравнение между горещо и студено разделно резервиране

Тук са представени сравнителни графики за вероятността за безотказна работа при горещо и студено резервирани системи. Изследвани са три примерни системи :

1. с $n = 3$ елемента, всеки от които е резервиран с $m = 1$ елемент;
2. с $n = 5$ елемента, всеки от които е резервиран с $m = 1$ елемент
3. с $n = 5$ елемента, всеки от които резервиран с $m = 3$ елемента.

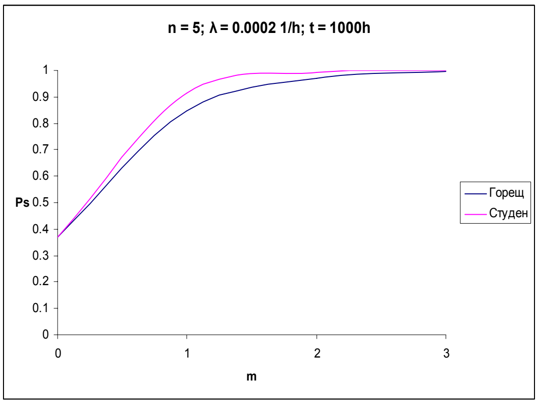


Фиг. 10 Сравнение горещ – студен резерв при 3 последователни елемента

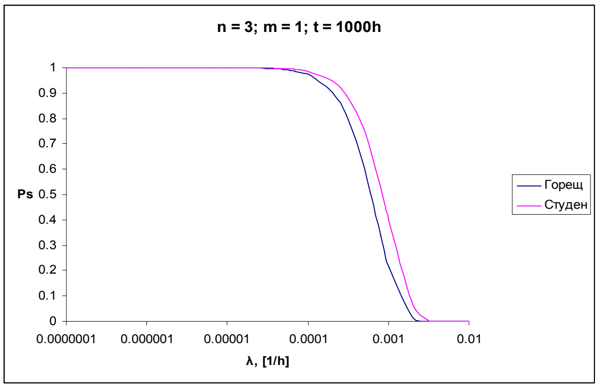


Фиг. 11 Сравнение горещ – студен резерв при 5 последователни елемента

Зависимостите за $P_S = f(\lambda)$ при горещ и студен резерв са представени на Фиг. 9, Фиг.10 и на Фиг.11. Зависимостта за P_S на първия случай при горещ и студен резерв е представена на фиг.12. Направено е сравнение между горещо и студено резервиране за схема с $n = 5$ елемента (всеки с интензивност на отказите $\lambda = 0{,}0002$ 1/h) при изменение на дълбочината на резерва m. Полученият резултат е представен на фиг. 13.



Фиг. 12 Сравнение горещ – студен резерв при еднократно резервиране



Фиг. 13 Сравнение горещ – студен резерв при изменение на *m*

5. КОМПАРАТИВЕН АНАЛИЗ НА СИСТЕМНО И ПОЕЛЕМЕНТНО РЕЗЕРВИРАНЕ

Безспорен интерес представлява отговорът на въпроса коя от двете структури, показани на фиг1. и фиг.2 е по-надеждна, от какво зависи това, кои са влияещите параметри и как надеждността зависи от тях.

Въвеждаме компаративна величина – отношение на функциите на надеждност на двете структури: η_{sb} - за горещ резерв (stand by) и за студен резерв (cold) η_c.

Сравнението между структурите при горещ резерв може да бъде направено като се използват формулата за безотказност (1), използвана тук за поелементното резервиране, и формулата от труд [4] за безотказността на структурата със системно резервиране:

(11) $$P_S(t) = e^{-n\lambda t}\sum_{i=0}^{m}\left(1-e^{-n\lambda t}\right)^i$$

Замествайки величините от формулите, за отношението η_{sb} се получава:

(12) $$\eta_{sb} = \frac{e^{-n\lambda t}\left[\sum_{i=0}^{m}\left(1-e^{-\lambda t}\right)^i\right]^n}{e^{-n\lambda t}\sum_{i=0}^{m}\left(1-e^{-n\lambda t}\right)^i} = \frac{\left[\sum_{i=0}^{m}\left(1-e^{-\lambda t}\right)^i\right]^n}{\sum_{i=0}^{m}\left(1-e^{-n\lambda t}\right)^i}$$

Сравнението между структурите при студен резерв може да бъде направено като се използват формулата за безотказност (7), използвана за поелементното резервиране, и формулата за безотказността на структурата със системно резервиране от труд [4]:

(13) $$P_S(t) = e^{-\lambda_0 t}\sum_{i=0}^{m}\frac{(\lambda_0 t)^i}{i!}$$

Замествайки величините от формулите, за отношението η_c се получава:

(14) $$\eta_c = \frac{\left[e^{-\lambda t}\sum_{i=0}^{m}\frac{(\lambda t)^i}{i!}\right]^n}{e^{-n\lambda t}\sum_{i=0}^{m}\frac{(n\lambda t)^i}{i!}} = \frac{\left[\sum_{i=0}^{m}\frac{(\lambda t)^i}{i!}\right]^n}{\sum_{i=0}^{m}\frac{(n\lambda t)^i}{i!}}$$

Аналитичното изследване на тези функции е твърде сложно, поради което се дават два изчислителни примера: n = 2, m = 1. За този случай компаративният коефициент:

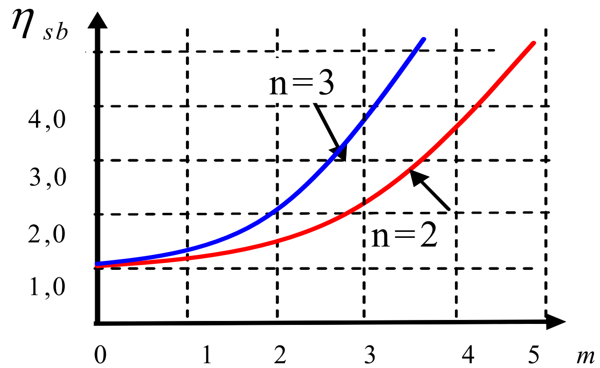
(15) $$\eta_{sb} = \frac{\left[\sum_{i=0}^{m}\left(1-e^{-\lambda t}\right)^i\right]^n}{\sum_{i=0}^{m}\left(1-e^{-n\lambda t}\right)^i} = \frac{\left[2-e^{-\lambda t}\right]^2}{2-e^{-2\lambda t}} = \frac{4-4e^{-\lambda t}+e^{-2\lambda t}}{2-e^{-2\lambda t}}.$$

Видно е, че надеждността на структурата с поелементно резервиране с горещ резерв е по-висока от надеждността на системното резервиране. В началото при нулева отработка (t=0) η_{sb} =1, което значи, че няма разлика в надеждностите на двете структури. С тяхното остаряване обаче надеждността на поелементното резервиране нараства, за да достигне при $t\to\infty$ двойно по-добра надеждност. Не е трудно да се установи, че разликата между функциите на безотказност нараства с увеличаване както на *n*, така и на *m* (фиг.13).

При същите условия е направен компаративен анализ на системите със студен резерв:

(16) $$\eta_c = \frac{\left[\sum_{i=0}^{m}\frac{(\lambda t)^i}{i!}\right]^n}{\sum_{i=0}^{m}\frac{(n\lambda t)^i}{i!}} = \frac{\left[\frac{(\lambda t)^0}{0!}+\frac{(\lambda t)^1}{1!}+\frac{(\lambda t)^2}{2!}+\ldots+\frac{(\lambda t)^m}{m!}\right]^n}{\frac{(2\lambda t)^0}{0!}+\frac{(2\lambda t)^1}{1!}+\frac{(2\lambda t)^2}{2!}+\ldots+\frac{(2\lambda t)^m}{m!}}$$

$$\eta_{c\,\substack{n=2\\m=1}} = \frac{\left[\frac{(\lambda t)^0}{0!}+\frac{(\lambda t)^1}{1!}\right]^2}{\frac{(2\lambda t)^0}{0!}+\frac{(2\lambda t)^1}{1!}} = \frac{(1+\lambda t)^2}{1+2\lambda t}$$



Фиг. 14 Съпоставка на надежностите на структури с поелементно и системно резервиране при горещ резерв

От направените изчисления и изследвания могат да се направят следните изводи:

1. Надеждността на отказоустойчивата структура, поелементно резервирана с горещ резерв, нараства с дълбочината на резервиране m**.** Този ефект е толкова по-силен, колкото по-висока е надеждността на градивните елементи (по-висока λ) и колкото повече са последователно свързаните елементни структури n.
2. Студеното резервиране на същите структури запазва като цяло характеристиките на горещото резервиране, но ги подсилва.
3. Поелементното резервиране е по-надеждно от системното, при това колкото по-дълбок е резервът, по-сложна е структурата и по-надеждни са елементите ефектът е толкова по-силен.
4. При еднакъв брой елементи с еднаква надеждност най-ефективна е структурата с поелементно студено резервиране.

6. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

1. Моделирано е поелементното резервиране на отказоустойчиви системи като са изведени формули за интензивността на отказите и средното им време до отказ.
2. Съставен е алгоритъм и е реализирана програма за изчисление на интензивността на отказите на отказоустойчивите системи.
3. По изведените формули са проведени изследвания, които потвърждават тяхната адекватност и позволяват да се направят изводи за ефективността на резервирането.
4. Направен е сравнителен анализ на системи с горещ и студен резерв при системно и поелементно резервиране.
5. Обобщени са изводи, произтичащи от проведеното изследване.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Христов Х.А., В.Г.Трифонов, Надеждност и сигурност на комуникациите, Нови знания, София, 2005.

[2] Сапожников В., В. Шаманов, Вл. Сапожников, Надежность систем железнодорожной автоматики, телемеханики и связи, Москва, 2003.

[3] Гиндев Е.Г., Увод в теорията и практиката на надеждността, Академично издателство “Марин Дринов”, София, 2000

[4] Христова М.П, З. Барбов. Моделиране и изследване на надеждността на многократно резервирани отказоустойчиви системи. Сборник научни трудове на ВТУ «Т. Каблешков» 2008 г.