Механика
Транспорт
Комуникации
Научно списание

ISSN 1312-3823
брой 3, 2007 г.
статия № 0189
http://www.mtc-aj.com

ТАНГЕНЦИАЛНИ НАПРЕЖЕНИЯ ПРИ ГРЕДИ, ИЗГРАДЕНИ ОТ КОМПОЗИТНИ МАТЕРИАЛИ

Валентин НЕДЕВ, Светлана ЛИЛКОВА - МАРКОВА,
Димитрина КИНДОВА, Димитър Лолов
val_nedev@vtu.bg, lilkova@hotmail.com, dkindova@abv.bg, dlolov@yahoo.com

В. Недев, доц. д-р инж., ВТУ "Т. Каблешков", София 1574, ул. Г. Милев 158,
С. Лилкова - Маркова, доц. д-р инж., Д. Киндова, ст. ас. инж., Д. Лолов, гл. ас. инж., УАСГ, София 1046, бул. Хр. Смирненски 1
БЪЛГАРИЯ

Резюме: *Чрез традиционните подходи за решение на греда от хомогенен материал са получени формули за тангенциалните напрежения при греда, съставена от различни материали. Дефинирани са приведени геометрични характеристики на напречното сечение, като са отчетени различните модули на линейните деформации. Работата е свързана с обучението по дисциплината Съпротивление на материалите и има методичен характер*
Ключови думи: *греди, тангенциални напрежения, композитни материали*

ВЪВЕДЕНИЕ

Курсът по дисциплината "Съпротивление на материалите" (СМ) включва основните теми за разрезни усилия, напрежения, деформации и тяхното приложение в инженерните изчисления. В него се набляга върху изследването на напрегнатото, деформираното и стабилитетното състояние на хомогенни прътови елементи, подложени на различни въздействия.

Една от основните теми в СМ е тази за равнинното напрегнато състояние при напречно огъване. За това състояние, характерните разрезни усилия са огъващият момент и срязващата сила. Огъващият момент се реализира в напречното сечение чрез нормални напрежения, а напречната сила – чрез тангенциални.

В съвременните технологии широко се прилагат композитни материали. В инженерен смисъл те са нееднородни материали, механично обединени от два или повече компонента [1]. Това позволява да се комбинират добрите характеристики на отделните материали.

Един от типовете композити се състои от компоненти, разположени на пластове. Необходимо и полезно е в курса по СМ да намери място изследването за якост на едномерни елементи със слоеста структура, както е сторено в редица чуждестранни технически университети.

Слоестата структура е често срещана при плочи и черупки, но се прилага и за едномерни елементи. Някои резултати за якостно изследване на греди със слоеста структура са дадени в [2, 3], като там не е намерила място обосновката за получаването на формулата за тангенциалните напрежения.

В тази връзка студентите трябва да добият по-пълна представа, как се изследват конструктивните елементи, изградени от слоести композити.

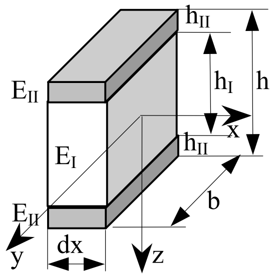
За да се изчерпи темата за тангенциалните напрежения в настоящата работа е изведена формула за същите при греда, съставена от два материала и е решен числен пример.

ПОСТАНОВКА НА ЗАДАЧАТА

Разгледана е греда с правоъгълно постоянно напречно сечение, изградена от два материала. Моделът ú включва ядро от единия материал и два тънки еластични слоя по горната и долната повърхност на ядрото – от другия материал (фиг.1). Връзката между ядрото и покриващите слоеве гарантира съвместната им работа без приплъзване и разслояване.

Изследването на тангенциалните напрежения в гредата е основано на класическите хипотези:

- Валидна е хипотезата за равнинност на напречните сечения (Бернули) и липсва натиск между надлъжните слоеве;
- Всички слоеве са в линейно еластичен стадий на деформация (Хук);
- Гредата е натоварена в надлъжната си равнина на материална симетрия.



Фиг. 1. Модел на гредата

Материалът на ядрото има сравнително малка коравина на огъване спрямо тази на външните слоеве.

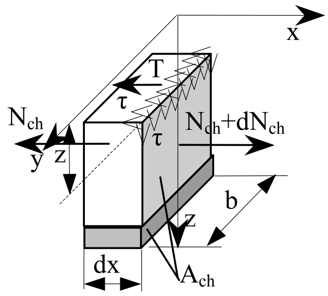
Модулите им на еластичност са съответно. E_I и E_{II}, като зависимостта между тях е

$$E_{II} = \eta E_I, \tag{1}$$

където $\eta > 1$.

Един от подходите за изследване на композитни греди е чрез използване на еквивалентна греда, приложен в настоящата работа. Основната идея е реалната греда да се приведе към "еднородна" греда, при която единия материал се „модифицира".

При извода на формулата за тангенциалните напрежения с хоризонтален разрез на разстояние z от нулевата линия се отделя част от гредата, имаща дължина dx. Отделената част е показана на фиг. 2.



Фиг. 2. Елементарен обем в равновесие

В сила е законът за взаимност на тангенциалните напрежения:

$$\tau_{xz} = \tau_{zx} = \tau . \tag{2}$$

Тангенциалните напрежения τ_{xz} възникват вследствие на деформации на срязване напречно на надлъжните влакна на гредата, а τ_{zx} - от надлъжни деформации. В резултат на тези напрежения върху надлъжните и напречните площадки гредата работи на огъване като плътно монолитно тяло.

Проекционното условие за равновесие на тази част върху ос x дава връзка между равнодействащата T на тангенциалните напрежения върху надлъжната площадка и нормалната сила N_{ch} за напречното й сечение, а именно:

$$T = dN_{ch} . \tag{3}$$

Допуска се, че тангенциалните напрежения τ са равномерно разпределени по ширината b на напречното сечение. Тогава след прилагане на зависимостта (3) за тях се записва израза:

$$\tau = \frac{T}{b.dx} = \frac{dN_{ch}}{b.dx} . \tag{4}$$

Нарастването на нормалната сила dN_{ch} върху частта от дясното напречно сечение на фрагмента се определя от нормалните напрежения σ_x по познатата формула:

$$dN_{ch} = \iint_{(A_{ch})} \sigma_x dA . \tag{5}$$

В работа [4] при греда от композитен материал е изведена формула за σ_x, която е приведена в следния вид в работа [5]:

$$\sigma_x = \eta \frac{dM_y}{I_y^{np}} z \,. \qquad (6)$$

С I_y^{np} е означен приведеният инерционен момент на напречното сечение за оста y. Коефициентът η за надлъжно влакно от материал II се определя по формулата

$$\eta = \frac{E_{II}}{E_I} \,, \qquad (7)$$

а за надлъжно влакно от материал I $\eta = 1$.

Приведеният инерционен момент I_y^{np} се определя чрез инерционните моменти за оста y на частите от напречното сечение от материал I и материал II по следния начин:

$$I_y^{np} = I_y^I + \eta I_y^{II} \,. \qquad (8)$$

След заместване на израза (6) за нормалните напрежения в (5) се получава:

$$dN_{ch} = \frac{dM_y}{I_{np}} \iint_{(A)} \eta \, z \, dA \,. \qquad (9)$$

Прилагайки дефиницията за статичен момент спрямо оста y при греда от еднороден материал, може да се запише

$$S_{y,ch}^{np} = \iint_{(A)} \eta \, z \, dA \,. \qquad (10)$$

С тази формула се отчита това, че гредата е изградена от различни материали.

Тогава замествайки (9) в (10) и поставяйки резултата в (4) за тангенциалните напрежения се получава:

$$\tau = \frac{dM_y}{dx} \frac{S_{y,ch}^{np}}{b I_y^{np}} \,. \qquad (11)$$

Тъй като е в сила диференциалната зависимост между M_y и Q_z

$$Q_z = \frac{dM_y}{dx} \,, \qquad (12)$$

от (11) окончателно се получава:

$$\tau = \frac{Q_z S_{y,ch}^{np}}{b I_y^{np}} \,. \qquad (13)$$

Тази формула има същата структура като формулата на Журавски в случая на греда от еднороден материал. Композитността на материала се отразява в приведените статичен и инерционен моменти на напречното сечение.

За показаното на фиг.1 правоъгълно напречно сечение формула (13) може да се преобразува за произволно надлъжно влакно от участъка с I и участъка с II материал. На нивото на всяко от тези влакна се изчислява статичният момент.

За произволно надлъжно влакно от участъка с II материал тангенциалните напрежения τ^{II} се намират по формулата:

$$\tau^{II} = \frac{Q_z \eta}{2 I_y^{np}} \left(\frac{h^2}{4} - z^2 \right) \qquad (14)$$

при $\frac{h_I}{2} \le z \le \frac{h}{2}$.

Тангенциалните напрежения τ^I за произволно надлъжно влакно от участъка с I материал се определят от формулата:

$$\tau^I = \frac{Q_z}{2 I_y^{np}} \left[\eta \, h_{II} \left(h - h_{II} \right) + \left(\frac{h_I^2}{4} - z^2 \right) \right] \qquad (15)$$

за $0 \le z \le \frac{h_I}{2}$.

На границата на двата материала $z = \frac{h_I}{2}$. за стойностите на тангенциалните напрежения се получава израза:

$$\tau^I = \tau^{II} = \frac{Q_z \eta}{2 I_y^{np}} h_{II} \left(h - h_{II} \right). \qquad (16)$$

При греда от еднороден материал с правоъгълно напречно сечение с размери b и h тангенциалните напрежения са също квадратна функция на координатата z и се определят по известната формула:

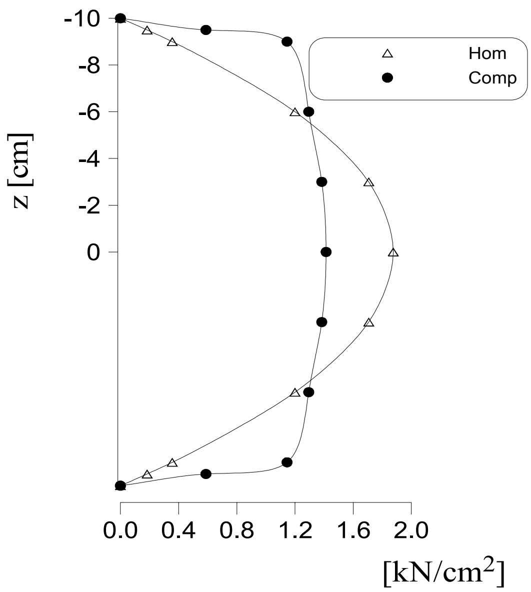
$$\tau = \frac{6 Q_z}{b h^3} \left(\frac{h^2}{4} - z^2 \right). \qquad (17)$$

ЧИСЛЕНИ РЕЗУЛТАТИ И АНАЛИЗ

Разгледана е греда с правоъгълно напречно сечение с размери $b = 10\,cm;$ $h = 20\,cm$. Ядрото й е от иглолистна дървесина (бор, ела) с модул на линейните деформации $E_I = 1100 kN/cm^2$. Обрамчващите слоеве са от стомана с модул $E_{II} = 20000\ kN / cm^2$. Стоманените листа са с дебелина $h_{II} = 1\ cm$, а за дървото $h_I = 18\ cm$.

Описаният подход е приложен и при големина на напречното разрезно усилие $Q_z = 250\ kN$ на фиг.3 са начертани диаграмите на тангенциалните напрежения за греда от еднороден и за греда от композитен материал.

Вижда се, че на границите на двата материала съществуват чупки в диаграмата. Те се дължат на различните стойности на производните спрямо координатата z на двете функции на тангенциалните напрежения τ^{II} и τ^{I} от изрази (14) и (15).



Фиг. 3. Диаграми на танг. напрежения

На същата фиг.3 е показана диаграмата на тангенциалните напрежения при греда от гореуказания дървен материал със същите размери b и h на напречното сечение.

От графиките е видно, че максималното тангенциално напрежение при гредата от композитния материал е доста по-малко от това при греда със същите геометрични характеристики, но изградена само от материала на ядрото.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

От гореизложеното и от показаното в [4] може да се направи изводът, че на границата на материалите се наблюдава скок в диаграмата на нормалните напрежения σ, докато в тази на тангенциалните напрежения τ при постоянна ширина на напречното сечение такъв скок няма.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Милков, С. Специални композиционни материали. Изд. на УАСГ, София, 2001.

[2] Танков, Н., В. Друмев. Съпротивление на материалите в примери и задачи (методическо ръководство). Техника, София, 1979.

[3] Колев, П., К. Младенов. Съпротивление на материалите. АВС Техника, София, 2001.

[4] Лилкова - Маркова, С. В. Нормални напрежения при чисто специално огъване на греди, изградени от композиционни материали. Юбилейна научна конференция “65 години Университет по архитектура, строителство и геодезия”, стр. 269-276, 2007.

[5] Лилкова - Маркова,С., Д. Киндова, Д. Лолов. Огъване на криви греди, изградени от композиционни материали, Науч. конф. с междунар. участие, ВСУ’07, I Математика. Механика, I-30 : I-33, 2007.

TANGENTIAL STRESSES OF COMPOSITE’S BEAMS

Valentin Nedev, Svetlana Lilkova-Markova, Dimitrina Kindova, Dimitar Lolov

Valentin Nedev, Higher School of Transport, Sofia
Svetlana Lilkova-Markova, Dimitrina Kindova, Dimitar Lolov - University of Architecture, Civil Engineering and Geodesyq Sofia
BULGARIA

Abstract: *Formulae of tangential stresses of a beam compounded from different materials were deduced using traditional approaches of a homogeneous beam’s decision. The different modules of linear deformations were reflected on new geometric characteristics of the cross-section. The study was connected with the teaching of the discipline Strength of materials and has a methodic character.*

Key words: *beams, tangential stresses, composites*