Механика Транспорт Комуникации

ISSN 1312-3823 (print)
ISSN 2367-6620 (online)
том 17, брой 3, 2019 г.

Научно списание **http://www.mtc-aj.com** **статия № 1841**

ЗАГУБА НА УСТОЙЧИВОСТ ПРИ ПОЛЕГАТА СФЕРИЧНА ЧЕРУПКА

Валентин Недев
val_nedev@abv.bg

Висше транспортно училище „Тодор Каблешков"
София 1574, ул. Гео Милев 158
БЪЛГАРИЯ

Ключови думи: *полегата сферична черупка, устойчивост*

Резюме: *Работата е насочена към определянето на зависимост между стойностите на един тип разпределен товар приложен върху полегата сферична черупка, основни геометрични характеристики и преместването в центъра на черупката. Изследването се провежда чрез вариационните уравнения на Лагранж интерпретирани за модела на полегата изотропна черупка. Определена е в явна форма зависимостта между интензитета на натоварването и провисването в центъра на черупката. Намерени са зависимости за критичните стойности на товара при загуба на устойчивост на черупката.*

В нелинейната теория на черупките съществено приложение намират числените методи, стъпващи на вариационната постановка на задачите на математическата физика [1, 2, 3, 4]. Към тях обикновено отнасяме метода на Ритц, метода на Бубнов – Гальоркин, вариационните методи и др.

Прилагането на вариационната формулировка в задачите от теорията на черупките дава възможност да се решават широк клас задачи. Това е свързано с по-ниския порядък на производните, участващи в използваните функционали, в сравнение с разрешаващите диференциални уравнения. Това разширява съществено класа от допустимите функции, участващи при построяването на приблизителните решения.

Известно е, че пълната енергия на деформацията при черупките има вида [5]:

$$\Pi = U - A^*, \tag{1}$$

където U е потенциалната енергия на деформацията,

$$A^* = A_\Gamma + A_\Omega \tag{2}$$

е сумата от работата на външните сили

$$A_\Gamma = \int_\Gamma \left(N_\nu^0 u_\nu + \hat{S}_\nu^0 u_t + \hat{Q}_\nu^0 w + M_{\nu\nu}^0 \theta_\nu \right) ds_t \; ; \tag{3}$$

$$A_\Omega = \iint_\Omega \left(q_1 u + q_2 v + q_\gamma w \right) AB \, d\alpha \, d\beta \; . \tag{4}$$

Тук A_Γ е работата на обобщените гранични величини, приложени по контура на черупката; A_Ω е работата на повърхнинните сили; Ω е областта от средната координатна повърхнина на черупката; Γ е контура на областта Ω; $\vec{t}$ - тангента, $\vec{\nu}$ -

нормала, $\vec{n}$ - бинормала; $N_{\nu}^{0}, \hat{S}_{\nu}^{0}, \hat{Q}_{\nu}^{0}, M_{\nu\nu}^{0}$ са зададени обобщени гранични усилия; u_{ν}, u_{t} - премествания по нормалата и допирателната към контура Γ.

Известно е, че сред геометрично възможните премествания за натоварената черупка, единствено за действителните премествания осигуряват минимална стойност за пълната енергия на деформацията. Нека разгледаме истинските премествания u, v, w и близките до тях, геометрично възможни премествания:

$$u^{*} = u + \delta u; \quad v^{*} = v + \delta v; \quad w^{*} = w + \delta w, \tag{5}$$

където $\delta u, \delta v$ и δw са вариации на преместванията

Тъй като истинските премествания осигуряват минимум на пълната потенциална енергия, то вариацията на последната ще има стационарна стойност, т.е.

$$\delta \Pi = \delta\left(U - A^{*}\right) = 0, \tag{6}$$

където

$$\delta A^{*} = \int_{\Gamma}\left(N_{\nu}^{0}\delta u_{\nu} + \hat{S}_{\nu}^{0}\delta u_{t} + \hat{Q}_{\nu}^{0}\delta w + M_{\nu\nu}^{0}\delta\theta_{\nu}\right)ds_{t} + \iint_{\Omega}\left(q_{1}\delta u + q_{2}\delta v + q_{\gamma}\delta w\right)AB\,d\alpha\,d\beta\ ; \tag{7}$$

$$\delta U = \iint_{\Omega}\left(N_{1}\delta\varepsilon_{1} + N_{2}\delta\varepsilon_{2} + S\delta\omega + M_{1}\delta\kappa_{1} + M_{2}\delta\kappa_{2} + 2H\delta\tau\right)AB\,d\alpha\,d\beta.$$

Тъй като тук варираме преместванията u, v, w, то в израза за δU трябва да заместим деформациите, изразени чрез преместванията.

Равенството (6) е интегрално тъждество, което е удовлетворено за произволни стойности на $\delta u, \delta v$ и δw от класа не геометрично възможните вариации и се нарича вариационно уравнение на Лагранж.

От теорията на черупките е известно, че от вариационното уравнение на Лагранж, следват уравненията за равновесие, статичните гранични условия и условията за съвместимост на деформациите.

От казаното до тук, следва че задачата за интегриране на диференциалните уравнения в теорията на черупките при известни гранични условия е равносилна на задачата за намиране на минимума на пълната потенциална енергия на деформацията (1). В практиката се използват различни варианти на вариационните уравнения на Лагранж.

Идеята за намиране на стационарна стойност на пълната потенциална енергия на деформацията се прилага в преките методи на математическата физика. Такива са методите свеждащи задачата от диференциална форма в решаване на система алгебрични уравнения. Най-разпространените сред тях са метода на Ритц и метода на Бубнов – Гальркин.

Основната идея в метода на Ритц се състои в изразяването на преместването на точките от средната повърхнина на черупката във вида:

$$\begin{aligned} u &= u^{0}(\alpha,\beta) + \sum_{k=1}^{N} a_{k} u^{(k)}(\alpha,\beta) \\ v &= v^{0}(\alpha,\beta) + \sum_{k=1}^{N} b_{k} v^{(k)}(\alpha,\beta); \\ w &= w^{0}(\alpha,\beta) + \sum_{k=1}^{N} c_{k} w^{(k)}(\alpha,\beta), \end{aligned} \tag{8}$$

където: $u^{(k)}, v^{(k)}, w^{(k)}\ (k = 1,2,...,N)$ са зададени координатни функции; $a_{k}, b_{k}, c_{k}\ (k = 1,2,...,N)$ са коефициенти, независещи от координатите. Функциите $u^{(0)}, v^{(0)}, w^{(0)}$ удовлетворяват хомогенни геометрични гранични условия за черупката.

При наложените ограничения десните страни на равенствата (8) за произволни стойности на константите $a_k, b_k, c_k \; (k = 1,2,..., N)$ представляват допустими геометрични премествания, чиито вариации са:

$$\delta u = \sum_{k=1}^{N} u^{(k)} \delta a_k ; \qquad \delta v = \sum_{k=1}^{N} v^{(k)} \delta b_k ; \qquad \delta w = \sum_{k=1}^{N} w^{(k)} \delta c_k \tag{9}$$

След определяне на преместванията и техните вариации по формули (8) и (9), от уравненията на еластичността се определят вътрешните усилия в черупката.
При заместване на горните изрази в условието за стационарност на пълната потенциална енергия на деформацията (6) получаваме

$$\sum \left[L_k(a_k, b_k, c_k)\delta a_k + M_k(a_k, b_k, c_k)\delta b_k + N_k(a_k, b_k, c_k)\delta c_k \right] = 0 , \tag{10}$$

където L_k, M_k, N_k са известни функции на променливите a_k, b_k, c_k.

Равенството (10) следва да се удовлетворява при произволни значения на вариациите $\delta a_k, \delta b_k$ и δc_k. Това позволява да запишем система от $3N$ уравнения със същия брой неизвестни

$$L_k(a_k, b_k, c_k) = 0 ; \;\; M_k(a_k, b_k, c_k) = 0 ; \;\; N_k(a_k, b_k, c_k) = 0 , \quad (k = 1, 2, ..., N). \tag{11}$$

Решението на горната система $a_k, b_k, c_k \; (k = 1,2,..., N)$ заместено в изразите за преместванията (8) ни дава приблизителни формули за тяхното определяне. Чрез преместванията от зависимостите премествания – деформации определяме последните, от тях от конститутивните уравнения се определят вътрешните усилия.

Грешката на получените по този метод величини в сравнение с техните точни стойности може да се намали, като се увеличи броя на базисните функции в изразите (8) или се изберат по-подходящи такива. Първата от двете възможности може да доведе до изчислителни трудности. Това налага да се прави съответен предварителен анализ за да се ограничи във възможната степен техният брой. В определени случаи от базисните функции може да се поиска да удовлетворяват конкретни статични гранични условия. Това обаче може да породи влошаване на сходимостта на решението. Съществен момент при реализацията на метода на Ритц е подходящия избор на функциите $u^{(0)}, v^{(0)}, w^{(0)}$. Те трябва да отразяват основната част на търсеното решение, удовлетворяващо граничните условия. Ако за такива се приеме някое приближено решение, то ролята на сумите в изразите (8) ще е на поправка към това приблизително решение. Известно е, че редица задачи от теорията на черупките притежават бързо затихващи решения, така наречения граничен ефект. Това прави ефективно при прилагането на този метод функциите $u^{(0)}, v^{(0)}, w^{(0)}$ да се избират при отчитане на граничния ефект.

Да поставим изискването геометрично допустимите премествания от изразите (8) осигуряват стационарност на пълната потенциална енергия на деформациите в черупката. Тогава за получаването на системата уравнения (10) може да се използва (1). За това от (8) определяме деформациите, а чрез уравненията на еластичността – вътрешните усилия. Последните заместваме в (1) и след интегриране получаваме пълната потенциална енергия на деформациите в черупката, като функция на параметрите $a_k, b_k, c_k \; (k = 1,2,..., N)$, т.е.

$$\Pi = \Pi(a_k, b_k, c_k). \tag{12}$$

Коефициентите $a_k, b_k, c_k \; (k = 1,2,..., N)$ сега могат да бъдат намерени от условието за екстремум на функцията $\Pi = \Pi(a_k, b_k, c_k)$, необходимото условие за което е изпълнението на равенствата:

$$\frac{\partial \Pi}{\partial a_k}=0\,; \qquad \frac{\partial \Pi}{\partial b_k}=0\,; \qquad \frac{\partial \Pi}{\partial c_k}=0 \qquad (k=1,\,2,\,\dots,\,N). \tag{13}$$

В подкрепа на изложеното по-горе ще разгледаме определянето на зависимостта между натоварване и провисване в непрекъсната полегата сферична черупка.

Черупка е с отвор $2a$, стрелка f и постоянна дебелина h е ставно подпряна по опорния контур с радиус $r=a$. Тя е натоварена с равномерен разпределен товар q по окръжност с радиус b.

Полагаме за провисването в центъра на черупката

$$w=c_1\left(1-\rho^2\right)\left(1-\frac{1+\nu}{5+\nu}\rho^2\right), \qquad \rho=\frac{r}{a}.$$

При $\nu=0{,}3$

$$w=c_1\left(1-\rho^2\right)\left(1-0{,}2453\rho^2\right).$$

Функцията на провисването в приетия вид при $r=a$ удовлетворява хомогенните гранични условия:

$$w(a)=0, \qquad M(a)=D_M\left(\frac{d^2w}{dr^2}+\frac{\nu}{r}.\frac{dw}{dr}\right)=0.$$

След заместване на w в уравнението за непрекъснатост на деформациите, същото приема вида

$$\frac{r}{Eh}.\frac{d}{dr}.\frac{1}{r}\frac{d}{dr}.\left(r^2N_1\right)+\frac{2fr}{a^2}.\frac{dw}{dr}+\frac{1}{2}\left(\frac{dw}{dr}\right)^2=0.$$

След интегрирането му и удовлетворяване на граничното условие $N_1(a)=0$, получаваме

$$N_1=-a^{-1}hfc_1E\left(0{,}54088-0{,}62264\rho^2+0{,}08188\rho^4\right)+$$
$$+a^{-2}hc_1E\left(0{,}29589-0{,}38828\rho^2+0{,}10116\rho^4-0{,}01003\rho^6\right).$$

От зависимостта $N_2=\frac{d}{dr}\left(N_1r\right)$, представляваща по същество едно от условията за равновесие на черупката, получаваме

$$N_2=-a^{-2}hfc_1E\left(0{,}54088-1{,}86782\rho^2+0{,}40940\rho^4\right)+$$
$$+a^{-2}hc_1E\left(0{,}29589-1{,}16484\rho^2+0{,}50580\rho^4-0{,}07021\rho^6\right).$$

Чрез получените величини се определя пълната потенциална енергия

$$\Pi=\pi Eh^5a^{-2}\left(Q\zeta_0+0{,}3300\zeta_0^2+0{,}04184k^2\zeta_0^2-0{,}08500k\zeta_0^3+0{,}04335\zeta_0^4\right),$$

където:

$$Q=Fa^2\left(\pi h^4E\right)^{-1}\left(1-\alpha^2\right)\left(1-0{,}2453\alpha^2\right);$$

$$\alpha=\frac{b}{a}; \qquad F=2\pi bq; \qquad \zeta_0=\frac{c_1}{h}; \qquad k=\frac{2f}{h}.$$

От условието за стационарност на потенциалната енергия $\frac{\partial \Pi}{\partial c_1}=0$, получаваме

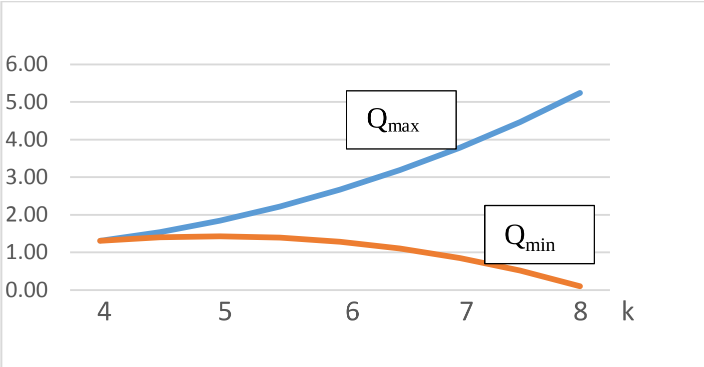
$$Q=\left(0{,}6600+0{,}08368k^2\right)\zeta_0-0{,}2550k\zeta_0^2+0{,}1734\zeta_0^3.$$

От изследването на зависимостта $Q=Q(\zeta_0)$ за екстремум, можем да определим стойностите на Q при които се наблюдава загуба на устойчивост на положението на черупката и прескачането ѝ в ново равновесно положение. При разглежданата задача се реализират две форми

$$Q_{\max} = \left(0{,}3234k + 0{,}0001588k^3\right)\zeta_0 + 0{,}00774\left(k^2 - 16\right)^{3/2}$$

$$Q_{\min} = \left(0{,}3234k + 0{,}0001588k^3\right)\zeta_0 - 0{,}00774\left(k^2 - 16\right)^{3/2}$$

Зависимостите на $Q_{\max}$ и $Q_{\min}$ от k са изобразени на фиг.1.



Фиг.1. Зависимост на натоварването Q от параметъра k.

ИЗВОДИ:

- Приведеният пример потвърждава успешното приложение на метода на Ритц съвместно с основните уравнения в теорията на еластичността за черупкови конструкции, например уравненията за равновесие и уравненията за непрекъснатост.
- От графиката на фиг.1 може да се направи изводът, че при $k \geq 8$ $Q_{\min} \leq 0$. Това може да се промени с увеличаване броя на базовите функции.

ЛИТЕРАТУРА:

[1] Вольмир А. С. Гибкие пластинки и оболочки. М., Гостехиздат, 1956. 420 с.
[2] Ворович И. И. О некоторых прямых методах в нелинейной теории пологих оболочек. ПММ, 1956, 20, № 4, с. 449-474.
[3] Кантор Б. Я. Нелинейные задачи теории неоднородных пологих оболочек. Киев, Наук. думка, 1971. 136 с.
[4] Розин Л. А. Вариационные постановки задач для упругих систем. Ленинград, Изд-во Ленингр. гос. ун-та, 1978. 224 с.
[5] Черных К. Ф. Линейная теория оболочек. Л.: Изд-во ЛГУ, 1962, Ч.1.374 с.; 1964, Ч. 2. 396 с.

LOSS OF STABILITY OF SLANTING SPHERICAL SHELL

Valentin Nedev
val_nedev@abv.bg

Todor Kableshkov University of Transport, Geo Milev Str.158, Sofia, BULGARIA

Key words: *spherical sloping shell, resistance*

Abstract: *The study is directed towards determining the dependency between the values of one type of distributed load applied to a slanting spherical shell, basic geometrical characteristics and displacement in the shell. The study is carried out by the Lagrange variation equations interpreted for the model of the slanting isotropic shell. The dependency between the intensity of the load and the vertical displacement in the shell's center is clearly defined. Dependencies of the critical load values are found when loss of shell stability is observed.*