

## НАПРЕГНАТО И ДЕФОРМИРАНО СЪСТОЯНИЕ НА ЕЛЕМЕНТИ С КРЪГЛО НАПРЕЧНО СЕЧЕНИЕ, ПОДЛОЖЕНИ НА ОГЪВАНЕ

Димитър Хубчев  
[dhubchev@vtu.bg](mailto:dhubchev@vtu.bg)

*Висше транспортно училище „Тодор Каблешков“  
София 1574, ул. „Гео Милев“ № 158  
БЪЛГАРИЯ*

**Ключови думи:** стоманобетонни елементи с кръгло напречно сечение, експлоатационни гранични състояния, напрежения в бетона, напрежения в армировката.

**Резюме:** Предмет на публикацията е определянето на напрегнатото и деформирано състояние на стоманобетонни елементи с кръгло напречно сечение и равномерно разпределена по периферията надлъжната армировка, подложени на огъване.

Конструкциите трябва да бъдат проектирани така, че да притежават необходимата носимоспособност, експлоатационна годност и дълготрайност. Експлоатационната годност е свързана с функционирането на конструкциите при нормална експлоатация, комфорта на хората и външния вид на строежите. Съгласно Еврокод 2 експлоатационна годност се постига чрез ограничаване на напреженията, ограничаване на широчината на пукнатините и ограничаване на преместванията. Напреженията на натиск в бетона трябва да се ограничават, за да се избегнат надлъжни пукнатини, микропукнатини или високо ниво на пълзене, когато това може да доведе до неприемливи ефекти за функцията на конструкцията. Напукването може да доведе до намаляване на дълготрайността. Напреженията на опън в армировката трябва да се ограничават, за да се избегнат нееластична деформация, недопустимо пукнатинообразуване или недопустими премествания. Също така стойността на напреженията е необходима величина за проверките на умора на бетона и армировката. За да се определят напреженията, трябва да се знае стойността на инерционния момент на напречното сечение.

Целта на настоящата публикация е да се създаде алгоритъм и да се направи таблица за определяне на инерционния момент на елементи с кръгло напречно сечение и равномерно разпределена по периферията надлъжна армировка, подложени на огъване и работещи с пукнатини. Определянето на инерционния момент е базирано на равенството на вътрешните сили в бетона и армировката.

### **Въведение**

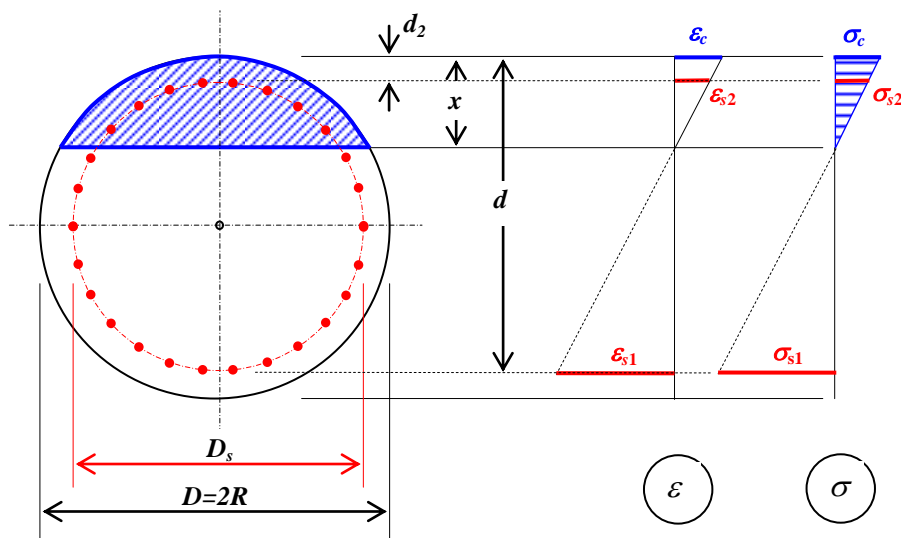
При високи нива на натисковите напрежения в бетона се явяват надлъжни пукнатини, намаляващи дълготрайността на конструкциите. Съгласно [1] натисковите напрежения от характеристична комбинация на натоварванията се ограничават до  $0,6f_{ck}$

( $f_{ck}$  е характеристикната стойност на цилиндричната якост на натиск на бетона). За ограничаване на деформациите от пълзене на бетона при продължително действащи натоварвания, напреженията от квазипостоянна комбинация се ограничават до  $0,45f_{ck}$ .

Провлачането на армировката води до появата на големи, постоянно отворени пукнатини. По тази причина напреженията на опън в армировката от характеристикна комбинация на натоварванията се ограничават до  $0,8f_{yk}$  ( $f_{yk}$  е характеристикната стойност на границата на провлачане на армировката).

## 1. Напрежения в бетона и армировката

Напреженията в бетона и армировката са най-големи в напречните сечения по пукнатините. За тези сечения става определянето на необходимата армировка в крайни гранични състояния.



фиг.1 – Напрежения в бетона и армировката

При елементи подложени на огъване, напреженията в натиснатия ръб на бетона и в армировката (фиг. 1) се определят по изразите:

$$(1) \quad \sigma_c = \frac{M_{Ed}}{I_{II}} x,$$

$$(2) \quad \sigma_{s1} = \alpha \frac{M_{Ed}}{I_{II}} (d - x) \quad \text{и}$$

$$(3) \quad \sigma_{s2} = \alpha \frac{M_{Ed}}{I_{II}} (x - d_2),$$

където:

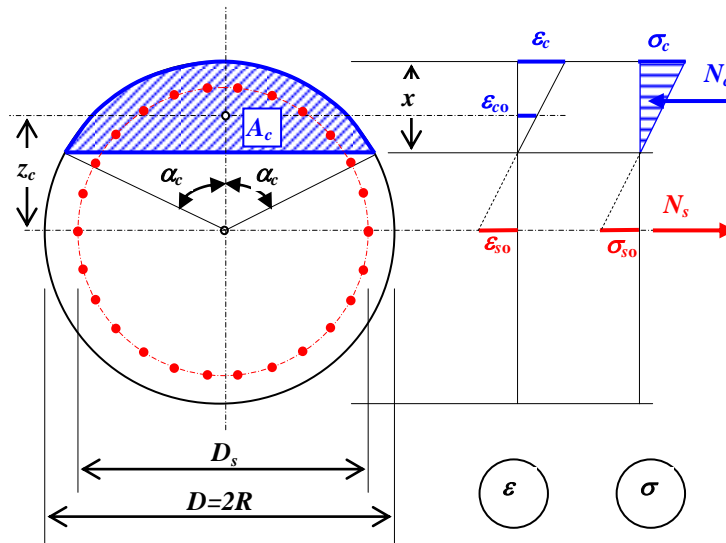
- $M_{Ed}$  е огъващият момент от съответната комбинация на натоварвания;
- $I_{II}$  е инерционният момент на напречното сечение с пукнатини (стадий II);
- $x$  е височината на натисковата зона;
- $\alpha = E_s / E_c$  е отношението на модулите на еластичност на стоманата  $E_s$  и на бетона  $E_c$ ; за натоварване с продължителност, предизвикваща пълзене на бетона, влиянието на пълзенето може да се отчете, като се използва ефективен модул на еластичност на бетона:

$$(4) \quad E_{c,eff} = \frac{E_{cm}}{1 + \varphi(\infty, t_0)};$$

-  $\varphi(\infty, t_0)$  е коефициентът на пълзене на бетона.

## 2. Инерционен момент на кръгло напречно сечение

За определяне на инерционния момент на работещи с пукнатини елементи с кръгло напречно сечение и равномерно разпределена по периметъра армировка се изхожда от равенството на натисковите усилия в бетона и опънните усилия в армировката.



фиг.2 – Надлъжни сили в бетона и армировката

Натисковите усилия в бетона са (фиг.2):

$$(5) \quad N_c = \varepsilon_{co} E_c A_c,$$

където:

- $\varepsilon_{co}$  е относителната натискава деформация на ниво център на тежестта (ц.т.) на натиснатата площ на бетона;
- $A_c$  е натиснатата площ на бетона, определена в [3]:

$$(6) \quad A_c = \frac{R^2}{2} (2\alpha_c - \sin 2\alpha_c),$$

където:

- $R=D/2$  е радиусът на напречното сечение;
- $2\alpha_c$  е централният ъгъл на дъгата на кръговия сегмент в [rad]:

$$(7) \quad \alpha_c = \arccos\left(1 - \frac{x}{R}\right).$$

Осовата опънна сила в армировката е (фиг.2):

$$(8) \quad N_s = \varepsilon_{so} E_s A_s,$$

където:

- $\varepsilon_{so}$  е относителната опънна деформация на нивото на центъра на напречното сечение;
- $A_s$  е общата площ на напречното сечение на надлъжната армировка.

Връзката между относителната деформация на ниво ц.т. на натиснатата площ на бетона и относителната деформация на ниво център на напречното сечение е (фиг.2):

$$(9) \quad \frac{\varepsilon_{so}}{R-x} = \frac{\varepsilon_{co}}{x+z_c-R} \rightarrow \varepsilon_{co} = \varepsilon_{so} \left[ \frac{4\sin^2 \alpha_c \tan \alpha_c}{3(2\alpha_c - \sin 2\alpha_c)} - 1 \right],$$

където:

- $z_c$  е разстоянието от оста на елемента до центъра на тежестта на кръговия сегмент:

$$(10) \quad z_c = \frac{S_c}{A_c} = R \frac{4\sin^3 \alpha_c}{3(2\alpha_c - \sin 2\alpha_c)};$$

- $S_c$  е статичният момент на натиснатата площ на бетона спрямо оста на елемента, определен в [3]:

$$(11) \quad S_c = 2R^3 \frac{\sin^3 \alpha_c}{3};$$

- $x$  е височината на натисковата зона:

$$(12) \quad x = R(1 - \cos \alpha_c).$$

Централният ъгъл на дъгата на кръговия сегмент може да се определи от равенството на натисковите усилия в бетона и опънните усилия в армировката.

От  $\sum N = 0 \Rightarrow \varepsilon_{co} E_c A_c = \varepsilon_{so} E_s A_s$  :

$$(13) \quad \varepsilon_{so} \left[ \frac{4\sin^2 \alpha_c \tan \alpha_c}{3(2\alpha_c - \sin 2\alpha_c)} - 1 \right] \frac{R^2}{2} (2\alpha_c - \sin 2\alpha_c) = \varepsilon_{so} \alpha A_s$$

и след преработка уравнението добива вида:

$$(13a) \quad 4\sin^2 \alpha_c \tan \alpha_c + 3\sin 2\alpha_c - 6\alpha_c = 6\pi \alpha \rho,$$

където :

- $\alpha$  се определя както в изрази (2) и (3);
- $\rho$  е коефициентът на армиране:

$$(14) \quad \rho = \frac{A_s}{\pi R^2}.$$

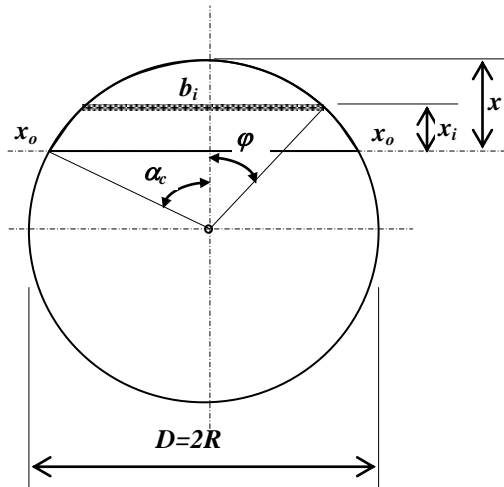
Инерционният момент на кръговия сегмент на натиснатата площ на бетона спрямо нулевата линия е (виж фиг.3):

$$(15) \quad I_{c,x_o-x_o} = \int_0^x b_i x_i^2 dx_i = 2R^4 \int_0^{\alpha_c} \sin^2 \varphi (\cos \varphi - \cos \alpha_c)^2 d\varphi,$$

където:

- $b_i = 2R \sin \varphi$  (виж фиг.3);

- $x_i = R(\cos \varphi - \cos \alpha_c)$ ;
- $dx_i = -R \sin \varphi d\varphi$ ;



фиг.3 – Инерционен момент на натиснатата площ в бетона спрямо нулевата линия

Израз (15) може да се представи във вида:

$$(15a) \quad I_{c, x_o - x_o} = 2R^4(I_1 + I_2 + I_3),$$

където:

$$(16) \quad - I_1 = \int_0^{\alpha_c} \sin^2 \varphi \cos^2 \varphi d\varphi = \frac{\alpha_c}{8} - \frac{\sin 4\alpha_c}{32};$$

$$(17) \quad - I_2 = -2 \cos \alpha_c \int_0^{\alpha_c} \sin^2 \varphi \cos \varphi d\varphi = -2 \cos \alpha_c \frac{\sin^3 \alpha_c}{3};$$

$$(18) \quad - I_3 = \cos^2 \alpha_c \int_0^{\alpha_c} \sin^2 \varphi d\varphi = \cos^2 \alpha_c \left( \frac{\alpha_c}{2} - \frac{\sin 2\alpha_c}{4} \right).$$

Инерционният момент на кръговия венец на армировката с дебелина  $t$  спрямо центъра на кръглото напречно сечение, определен в [3] е:

$$(19) \quad I_{s, x-x} = \pi t R_s^3 = \frac{\pi \rho k_s^2 R^4}{2},$$

където:

$$(20) \quad - t = \frac{A_s}{2\pi R_s} = \frac{\rho R}{2k_s};$$

- $R_s$  е радиусът на окръжността, минаваща през осите на прътите на надлъжната армировка;

$$(21) \quad - k_s = \frac{D_s}{D} = \frac{R_s}{R}.$$

Инерционен момент на кръговия венец на армировката спрямо нулевата линия е:

$$(22) \quad I_{s,x_0-x_0} = I_{s,x-x} + A_s(R-x)^2 = \pi \rho R^4 \left( \frac{k_s^2}{2} + \cos^2 \alpha_c \right).$$

Общият инерционен момент на напречното сечение спрямо нулевата линия е:

$$(23) \quad I_{II} = I_{c,x_0-x_0} + \alpha I_{s,x_0-x_0} = K_I R^4,$$

където:

$$(24) \quad K_I = 2(I_1 + I_2 + I_3) + \pi \alpha \rho \left( \frac{k_s^2}{2} + \cos^2 \alpha_c \right).$$

В таблица 1 за различни стойности на  $\alpha\rho$  са изчислени стойностите на централният ъгъл  $\alpha_c$  по израз (13а), отношенията  $x/R$ ,  $A_c/R^2$  и  $z_c/R$  по изрази съответно (12), (6) и (10), както и стойностите на коефициента  $K_I$  по израз (24).

Таблица 1 - Инерционен момент на елементи с кръгло напречно сечение, работещи на огъване

$\alpha\rho$	$\alpha_c$ [rad]	$\frac{x}{R}$	$\frac{A_c}{R^2}$	$\frac{z_c}{R}$	$K_I \cdot 10^3$		
					$k_s = 0,7$	$k_s = 0,8$	$k_s = 0,9$
0,01	0,72640	0,2524	0,2299	0,8497	28,66	31,02	33,69
0,02	0,82500	0,3214	0,3266	0,8091	52,22	56,93	62,27
0,03	0,88695	0,3682	0,3972	0,7817	73,36	80,43	88,44
0,04	0,93260	0,4043	0,4541	0,7606	92,87	102,3	113,0
0,05	0,96880	0,4337	0,5021	0,7435	111,2	122,9	136,3
0,06	0,99883	0,4587	0,5437	0,7289	128,5	142,6	158,6
0,07	1,02450	0,4805	0,5806	0,7163	145,0	161,5	180,2
0,08	1,04685	0,4997	0,6137	0,7052	160,9	179,7	201,1
0,09	1,06666	0,5169	0,6437	0,6952	176,2	197,4	221,4
0,10	1,08441	0,5326	0,6712	0,6862	190,9	214,5	241,2
0,11	1,10048	0,5468	0,6965	0,6780	205,3	231,2	260,6
0,12	1,11515	0,5600	0,7200	0,6705	219,3	247,5	279,6
0,13	1,12861	0,5721	0,7419	0,6635	232,9	263,5	298,2
0,14	1,14106	0,5834	0,7623	0,6570	246,2	279,2	316,5
0,15	1,15261	0,5939	0,7815	0,6510	259,2	294,5	334,6
0,16	1,16338	0,6038	0,7996	0,6453	271,9	309,6	352,4
0,17	1,17346	0,6130	0,8166	0,6400	284,4	324,5	369,9
0,18	1,18292	0,6218	0,8328	0,6350	296,7	339,1	387,2
0,19	1,19184	0,6300	0,8481	0,6303	308,8	353,6	404,3
0,20	1,20025	0,6379	0,8627	0,6259	320,7	367,9	421,3
0,21	1,20822	0,6453	0,8766	0,6216	332,5	381,9	438,0
0,22	1,21578	0,6524	0,8899	0,6176	344,0	395,9	454,6
0,23	1,22297	0,6591	0,9025	0,6138	355,5	409,6	471,1
0,24	1,22981	0,6656	0,9146	0,6101	366,7	423,3	487,4
0,25	1,23634	0,6717	0,9263	0,6066	377,9	436,8	503,5
0,26	1,24258	0,6776	0,9374	0,6032	388,9	450,2	519,6
0,27	1,24854	0,6833	0,9481	0,6000	399,8	463,4	535,5
0,28	1,25426	0,6887	0,9584	0,5970	410,6	476,6	551,3
0,29	1,25975	0,6939	0,9684	0,5940	421,3	489,6	567,1
0,30	1,26501	0,6990	0,9779	0,5912	431,9	502,6	582,7
0,31	1,27008	0,7038	0,9872	0,5884	442,4	515,4	598,2
0,32	1,27495	0,7085	0,9961	0,5858	452,8	528,2	613,6

## ЛИТЕРАТУРА

- [1]. БДС EN 1992-1-1. Еврокод 2: Проектиране на бетонни и стоманобетонни конструкции. Част 1-1: Общи правила и правила за сгради, 2005.
- [2]. Двайт, Г. Б. Таблицы интегралов и другие математические формулы, издательство „Наука”, Москва, 1973 г.
- [3]. Хубчев, Д. Стоманобетонни елементи с кръгло напречно сечение, подложени на огъване – усилия в бетона и армировката, е-списание „Механика, транспорт, комуникации”, бр. 1 /2018 г.

## REINFORCED CONCRETE ELEMENTS WITH CIRCULAR CROSS-SECTION, SUBJECTED TO A BENDING – INTERNAL FORCES IN CONCRETE AND REINFORCEMENT

**Dimitar Hubchev**  
[dhubchev@vtu.bg](mailto:dhubchev@vtu.bg)

*Todor Kableshkov University of Transport,  
158 Geo Milev Street, Sofia 1574,  
BULGARIA*

**Key words:** *reinforced concrete structures with circular cross-section, serviceability limit states, stress in the concrete, stress in the reinforcement.*

**Abstract:** *Subject of the publication is the determination of stress-strain condition of reinforced concrete elements with circular cross-section and evenly distributed longitudinal reinforcement along the periphery subjected to a bending moment.*

*The structures shall be designed to have adequate structural resistance, serviceability and durability. Serviceability concerns the functioning of the structures under normal use, the comfort of people and the appearance of the construction works. According to Eurocode 2 serviceability is achieved by stress limitation, crack control and deflection control. The compressive stress in the concrete shall be limited in order to avoid longitudinal cracks, micro-cracks or high levels of creep, where they could result in unacceptable effects on the function of the structure. The cracking may lead to a reduction of durability. The tensile stresses in the reinforcement shall be limited in order to avoid inelastic strain, unacceptable cracking or unacceptable deformation. Also the stress value is a required quantity for the fatigue verifications of concrete and reinforcement. To determine the stresses need to know the second moment of area of the cross-section.*

*The purposes of this publication is to create an algorithm and to make a table for determining the second moment of area for cracked states of elements with circular cross-section and evenly distributed longitudinal reinforcement along the periphery, subjected to a bending moment. The determination of the second moment of area is based on the equality of the internal forces in the concrete and the reinforcement.*