



## **ИЗЧИСЛЯВАНЕ НА СТОМАНОБЕТОННИ ЕЛЕМЕНТИ С КРЪГЛО НАПРЕЧНО СЕЧЕНИЕ ЗА ДЕЙСТВИЕТО НА ОГЪВАЩ МОМЕНТ И НАТИСКОВА СИЛА**

**Димитър Хубчев**  
[dhubchev@vtu.bg](mailto:dhubchev@vtu.bg)

**Висше Транспортно Училище „Тодор Каблешков“  
София 1574, ул. „Гео Милев“ № 158  
БЪЛГАРИЯ**

**Ключови думи:** стоманобетонни елементи с кръгло напречно сечение, граничната носимоспособност на нормални сечения, изливни пилоти

**Резюме:** Обект на публикацията е изчисляването по крайни гранични състояния на стоманобетонни елементи с кръгло напречно сечение и равномерно разпределена по периферията надлъжната армировка, подложени на огъване и натискава сила.

Кръглото напречно сечение е често срещано при стоманобетонни елементи като колони на сгради, стълбове на мостове и изливни пилоти. Най-често при такива елементи надлъжната армировка е равномерно разпределена по периферията на напречното сечение. При елементи, работещи преобладаващо на огъване част от надлъжната армировка попада в натисковата зона и работи на натиск заедно с бетона, друга част работи на опън. Освен това деформациите в армировката, която се намира в близост до нулевата линия са еластични и нивото на напреженията е ниско, а в армировката, която е отдалечена от нулевата линия могат да се развият пластични деформации и напреженията в нея достигат до границата на провлачане. Отчитането на всички тези фактори затруднява процеса на изчисляване на стоманобетонни елементи с кръгло напречно сечение.

Целите на настоящата публикация са:

- да се определи изменението на надлъжната сила и огъващия момент в армировката в зоните, в които деформациите на армировката са нелинейни;
- да се създаде алгоритъм и по този алгоритъм да се направи примерна таблица за определяне на необходимата армировка при елементи с кръгло напречно сечение, подложени на огъващ момент и натискава сила.

В публикацията е решен числен пример, с който е показана последователността на работата при определяне на армировката.

## 1. Влияние на пластичните деформации на армировката в опънната зона

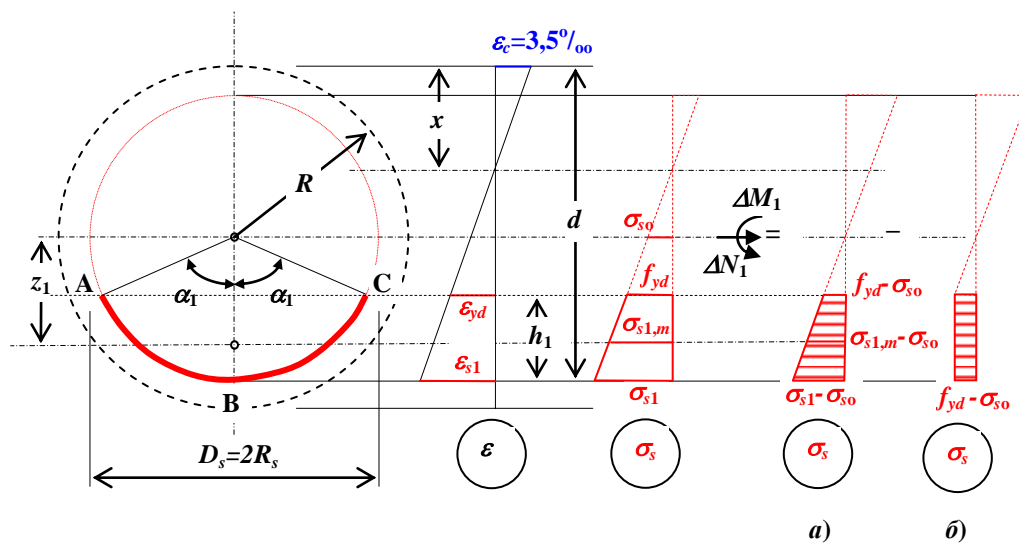
В сектора ABC от кръговия венец на армировката (фиг.1) се развиват пластични деформации и напрежения не нарастват над границата на провлачане  $f_{yd}$ . Редукцията на надлъжната опънна сила в армировката в този сектор  $\Delta N_{s1}$  вследствие на развитието на пластични деформации и по-малките опънни напрежения се получава, като от усилията на напреженията по фиг.1 а) се извадят усилията на напреженията по фиг.1 б):

$$(1) \quad \Delta N_{s1} = A_1 (\sigma_{s1,m} - f_{yd}),$$

където:

- $A_1$  е площта на напречното сечение на армировката в опънната зона, в която са се развили пластични деформации, определя се по израз (17) от [3];
- $\sigma_{s1,m}$  са напреженията на армировката на ниво център на тежестта на площта  $A_1$  на сектора ABC:

$$(2) \quad \sigma_{s1,m} = \sigma_{s1} \frac{R - x + z_1}{d - x}.$$



фиг.1 – Отчитане развитието на пластични деформации в опънната зона на армировката

Разстоянието от ц.т. на сектора ABC до ц.т. на напречното сечение е (фиг.1):

$$(3) \quad z_1 = \frac{S_1}{A_1} = R_s \frac{\sin \alpha_1}{\alpha_1},$$

където:

- $S_1$  е статичният момент на сектора ABC спрямо ос, минаваща през центъра на напречното сечение на елемента и успоредна на нулевата линия:

$$(4) \quad S_1 = 2 \int_0^{\alpha_1} t R_s^2 \cos \varphi d\varphi = 2t R_s^2 \sin \varphi \Big|_0^{\alpha_1} = 2t R_s^2 \sin \alpha_1.$$

- $\alpha_1$  се определя по израз (18) на [3];
- $t$  е дебелината на кръговия венец на армировката (израз (11) от [3]):

$$(5) \quad t = \frac{\rho_{eff} R f_{cd}}{2k_s f_{yd}};$$

- $\rho_{eff}$  е механичният коефициент на армиране:

$$(6) \quad \rho_{eff} = \frac{A_s f_{yd}}{\pi R^2 f_{cd}};$$

$$(7) \quad -k_s = \frac{D_s}{D} = \frac{R_s}{R}.$$

Редукцията на огъващия момент в резултат на замяната на напреженията по фиг. 1 а) в сектора ABC с по-малките напрежения по фиг. 1 б) е:

$$(8) \quad \Delta M_1 = (\sigma_{s1} - \sigma_{s0}) W_1 - A_1(f_{yd} - \sigma_{s0}) z_1,$$

където:

-  $W_1$  е съпротивителният момент на сектора ABC за нишките с деформация  $\varepsilon_{s1}$  спрямо ос, минаваща през центъра на напречното сечение на елемента и успоредна на нулевата линия:

$$(9) \quad W_1 = \frac{I_{x-x}}{R_s} = \frac{t R_s^2}{2} (2\alpha_1 + \sin 2\alpha_1);$$

-  $I_{x-x}$  е инерционният момент на сектора ABC спрямо същата ос:

$$(10) \quad I_{x-x} = 2 \int_0^{\alpha_1} (R_s \cos \varphi)^2 t R_s d\varphi = 2 t R_s^3 \left( \frac{\varphi}{2} + \frac{\sin 2\varphi}{4} \right) \Big|_0^{\alpha_1} = \frac{t R_s^3}{2} (2\alpha_1 + \sin 2\alpha_1).$$

## 2. Влияние на пластичните деформации на армировката в натисквата зона

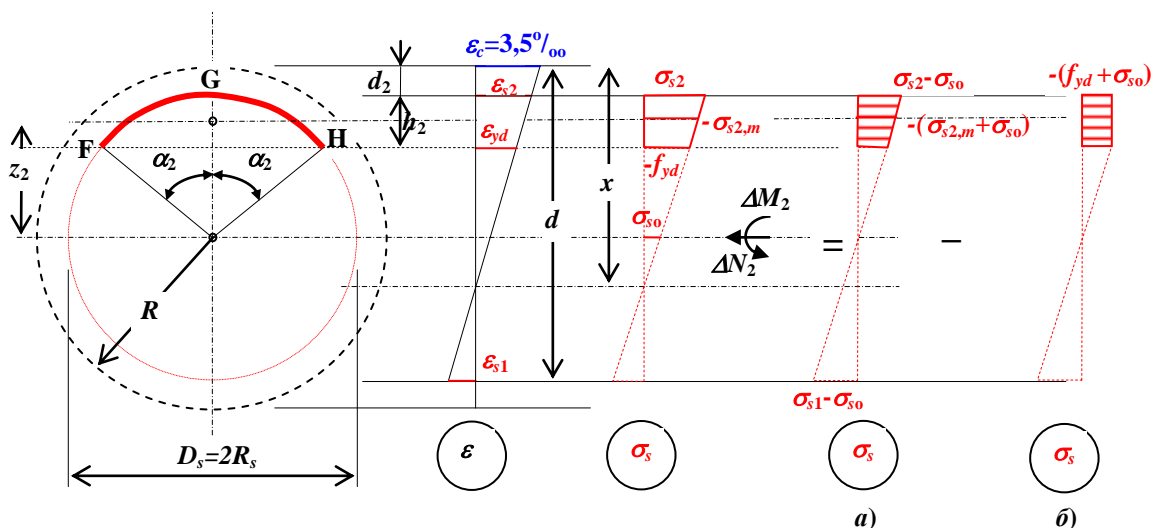
Редукцията на надлъжната натискава сила  $\Delta N_{s2}$  в резултат на развитието на пластични деформации и по-малките натискови напрежения на армировката в сектора FGH от кръговия венец на армировката се получава, като от усилията на напреженията по фиг.2 а) се извадят усилията на напреженията по фиг.2 б):

$$(11) \quad \Delta N_2 = A_2 (\sigma_{s2,m} - f_{yd}),$$

където:

-  $A_2$  е площта на напречното сечение на армировката в натисквата зона, в която са се развили пластични деформации, определя се по израз (20) от [3];  
 -  $\sigma_{s2,m}$  са напреженията на армировката на ниво център на тежестта на площта  $A_2$  на сектора FGH:

$$(12) \quad \sigma_{s2,m} = |\sigma_{s2}| \frac{x - R + z_2}{x - d_2}.$$



фиг.2 – Отчитане развитието на пластични деформации в натисквата зона на армировката

Разстоянието от ц.т. на сектора FGH до ц.т. на напречното сечение е (фиг.2):

$$(13) \quad z_2 = \frac{S_2}{A_2} = R_s \frac{\sin \alpha_2}{\alpha_2},$$

където:

- $\alpha_2$  се определя по израз (21) на [3];
- $S_2$  е статичният момент на сектора FGH спрямо ос, минаваща през центъра на напречното сечение на елемента и успоредна на нулевата линия:

$$(14) \quad S_2 = 2 \int_0^{\alpha_2} t R_s^2 \cos \varphi d\varphi = 2 t R_s^2 \sin \alpha_2 .$$

Редукцията на огъващия момент в резултат на замяната на напреженията по фиг. 2 а) в сектора FGH с по-малките напрежения по фиг. 2 б) :

$$(15) \quad \Delta M_2 = (\sigma_{s1} - \sigma_{so}) W_2 - A_2(f_{yd} + \sigma_{so}) z_2,$$

където:

- $W_2$  е съпротивителният момент на сектора FGH за нишките с деформация  $\varepsilon_{s2}$  спрямо ос, минаваща през центъра на напречното сечение на елемента и успоредна на нулевата линия:

$$(16) \quad W_2 = \frac{I_{x-x}}{R_s} = \frac{t R_s^2}{2} (2\alpha_2 + \sin 2\alpha_2);$$

- $I_{x-x}$  е инерционният момент на сектора FGH спрямо същата ос:

$$(17) \quad I_{x-x} = \frac{t R_s^3}{2} (2\alpha_2 + \sin 2\alpha_2).$$

В изрази (8) и (15) знакът на напрежението  $\sigma_{so}$  е „+” при опън и „-” при натиск.

### 3. Условия за равновесие на въздействащите сили и вътрешните усилия

Площта на напречното сечение на надлъжната армировка и носимоспособността на огъване могат да се определят от условията за равновесие на въздействащите сили и вътрешните усилия.

От  $\Sigma N=0$  (фиг.3):

$$(18) \quad N_{Ed} = N_c - N_s + \Delta N_{s1} - \Delta N_{s2} ,$$

където:

- $N_{Ed} = n \pi f_{cd} R^2$  е въздействащата натискова сила;
- $n$  е относителната нормална сила:

$$(19) \quad n = \frac{N_{Ed}}{\pi R^2 f_{cd}} ;$$

- $N_c$  е натисковата сила в бетона, определена по израз (3) на [3];
- $N_s$  е равнодействащата на осовата сила в армировката, определена по израз (10) на [3];
- $\Delta N_{s1}$  и  $\Delta N_{s2}$  се определят по изрази (1) и (11).

От израз (18) се извежда стойността на механичният коефициент на армиране:

$$(20) \quad \rho_{eff} = \frac{0,45 \eta (2\alpha_c - \sin 2\alpha_c) - n \pi}{\left[ \frac{\sigma_{so}}{f_{yd}} \pi - \alpha_1 \left( \frac{\sigma_{s1,m}}{f_{yd}} - 1 \right) + \alpha_2 \left( \frac{\sigma_{s2,m}}{f_{yd}} - 1 \right) \right]} .$$

Условието за равновесие на въздействащия огъващ момент с огъващите моменти на вътрешните усилия спрямо оста на елемента е:

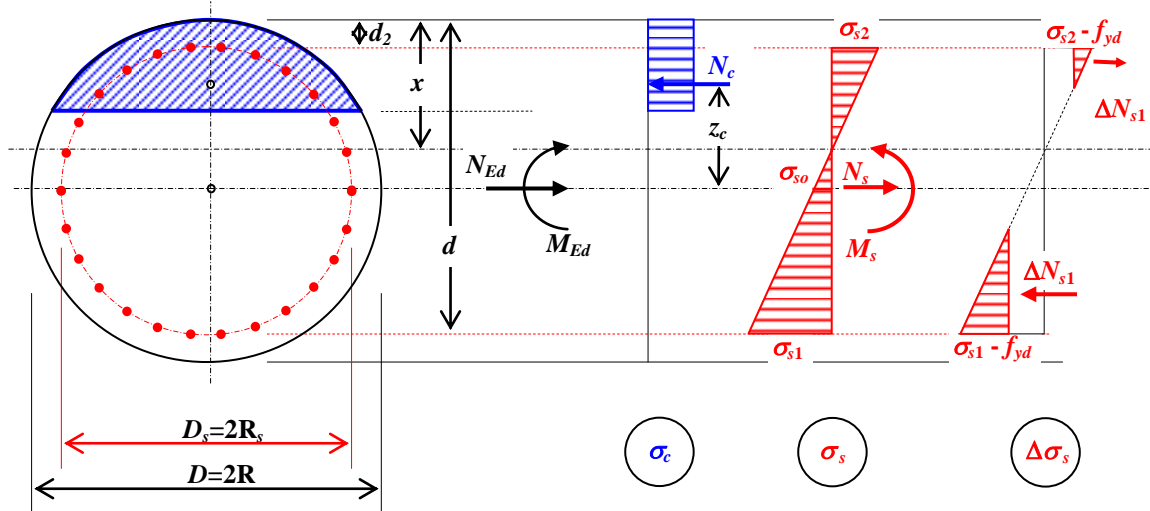
$$(21) \quad M_{Ed} = M_c + M_s - \Delta M_1 - \Delta M_2 ,$$

където:

- $M_{Ed}$  е въздействащият огъващ момент;
- $M_c$  е огъващият момент на усилията в бетона (израз(6) от[3]);
- $M_s$  е огъващият момент при еластична работа на армировката (израз(13) от[3]):

$$(22) \quad -M_s = \pi k_s \rho_{eff} \frac{(\sigma_{s1} - \sigma_{s0})}{2 f_{yd}} f_{cd} R^3;$$

-  $\Delta M_1$  и  $\Delta M_2$  се определят по изрази (8) и (15).



фиг.3 – Усилия в бетона и армивката

След преработка израз (21) добива вида:

$$(23) \quad \alpha_m = \frac{M_{Ed}}{f_{cd} D^3} = \frac{3\eta \sin^3 \alpha_c}{40} + \frac{k_s \rho_{eff}}{8 f_{yd}} \left\{ \frac{(\sigma_{s1} - \sigma_{s0})}{2} \left[ \pi - \alpha_1 - \frac{\sin 2\alpha_1}{2} - \alpha_2 - \frac{\sin 2\alpha_2}{2} \right] + \right. \\ \left. + (f_{yd} - \sigma_{s0}) \sin \alpha_1 + (f_{yd} + \sigma_{s0}) \sin \alpha_2 \right\}.$$

#### 4. Изчисляване на необходимата надлъжна армивка

За определяне на необходимата надлъжна армивка на кръгли напречни сечения за действието на надлъжна сила и огъващ момент по дадените по-горе изрази могат да се съставят таблици при следните зададени параметри:

➤ Отношение  $k_s$  на диаметра, по който е разположена надлъжната армивка  $D_s$  към диаметра на напречното сечение на елемента  $D$  (израз (7)), от където следва:

$$- R_s = k_s R;$$

$$- d = (1 + k_s) R;$$

$$- d_2 = (1 - k_s) R;$$

$$- x = \xi d = \xi (1 + k_s) R;$$

$$- \varepsilon_{s1} = \left( \frac{1}{\xi} - 1 \right) 3,5 \left[ \frac{o}{oo} \right] \quad \left. \vphantom{\varepsilon_{s1}} \right\} \text{(знак "+" } \rightarrow \text{опън)}$$

$$- \varepsilon_{s2} = \left( \frac{1 - k_s}{\xi(1 + k_s)} - 1 \right) 3,5 \left[ \frac{o}{oo} \right] \quad \left. \vphantom{\varepsilon_{s2}} \right\} \text{(знак "-" } \rightarrow \text{натиск)}$$

➤ Относителна натискава сила  $n$  (израз (19))

➤ Клас на армивката.

В таблица 1 за различни стойности на  $\xi$  и  $n$  са изчислени стойностите на  $\rho_{eff}$  по израз (20) и  $\alpha_m$  по израз (23). Таблицата е направена за армировка от клас B500 ( $f_{yd}=430MPa$ ) и  $k_s=0,8$ .

Площта на необходимата армировка може да се определи по следната последователност:

$$1) \quad n = \frac{4N_{Ed}}{\pi D^2 f_{cd}}; \quad (N_{Ed} \text{ е със знак „+” при натиск}).$$

$$2) \quad \alpha_m = \frac{M_{Ed}}{D^3 f_{cd}} = \dots \xrightarrow{\text{табл.1}} \rho_{eff} = \dots;$$

$$3) \quad A_{s,tot} = \frac{\rho_{eff} \pi D^2}{4(f_{yd}/f_{cd})}.$$

Таблица 1 – Определяне на необходимата армировка клас B500 ( $k_s=0,8$ )

$\alpha_m$	$n = 0$		$n = 0,2$		$n = 0,4$		$n = 0,8$	
	$\rho_{eff}[\%]$	$\xi$	$\rho_{eff}[\%]$	$\xi$	$\rho_{eff}[\%]$	$\xi$	$\rho_{eff}[\%]$	$\xi$
0,02	5,958	0,1398	-	-	-	-	-	-
0,04	12,94	0,2025	-	-	-	-	3,54	1,1165
0,06	20,56	0,2468	3,122	0,3913	-	-	12,80	1,0334
0,08	28,64	0,2808	12,63	0,4173	3,670	0,6279	23,34	0,9606
0,10	37,11	0,3084	22,50	0,4365	15,70	0,6142	34,79	0,8997
0,12	45,95	0,3317	32,63	0,4514	27,42	0,6052	46,73	0,8507
0,14	55,07	0,3515	42,97	0,4631	38,98	0,5988	58,82	0,8123
0,16	64,45	0,3684	53,45	0,4726	50,46	0,5939	70,88	0,7822
0,18	74,04	0,3830	64,05	0,4804	61,88	0,5900	82,84	0,7583
0,20	83,81	0,3958	74,75	0,4869	73,27	0,5868	94,66	0,7391
0,22	93,74	0,4069	85,52	0,4924	84,63	0,5842	106,4	0,7234
0,24	103,8	0,4167	96,35	0,4972	95,96	0,5820	118,0	0,7103
0,26	114,0	0,4254	107,2	0,5013	107,3	0,5801	129,5	0,6993
0,28	124,3	0,4332	118,2	0,5048	118,6	0,5785	140,9	0,6899
0,30	134,6	0,4401	129,1	0,5080	129,9	0,5771	152,3	0,6818
0,32	145,1	0,4463	140,1	0,5108	141,2	0,5758	163,6	0,6747
0,34	155,6	0,4520	151,1	0,5132	152,5	0,5747	174,9	0,6685
0,36	166,2	0,4571	162,1	0,5155	163,7	0,5737	186,1	0,6630
0,38	176,8	0,4618	173,2	0,5175	175,0	0,5728	197,3	0,6581
0,40	187,5	0,4661	184,3	0,5193	186,3	0,5720	208,4	0,6537
0,42	198,2	0,4700	195,3	0,5210	197,5	0,5712	219,6	0,6497
0,44	208,9	0,4736	206,4	0,5225	208,8	0,5705	230,7	0,6461
0,46	219,7	0,4769	217,5	0,5239	220,1	0,5699	241,7	0,6428
0,48	230,6	0,4800	228,6	0,5251	231,3	0,5694	252,8	0,6398
0,50	241,4	0,4828	239,8	0,5263	242,6	0,5688	263,8	0,6371
0,52	252,3	0,4855	250,9	0,5274	253,8	0,5683	274,9	0,6345

Пример. Да се определи площта на надлъжната армировка на при следните данни:  
 $D = 80\text{cm}$ ; Огъващ момент  $M_{Ed} = 1390\text{kNm}$ ; Бетон клас C30/37;  
 $D_s = 64\text{cm}$ ; Натискава сила  $N_{Ed} = 3400\text{kN}$ ; Армировка клас B500.

Решение:

- Характеристики на бетона:

$$f_{ck} = 30 \text{ MPa}; \quad f_{cd} = \alpha_{cc} f_{ck} / \gamma_c = 0,85 \cdot 30 / 1,5 = 17 \text{ MPa} = 1,7 \text{ kN/cm}^2.$$

- Характеристики на армировката:

$$f_{yk} = 500 \text{ MPa}; \quad f_{yd} = f_{yk} / \gamma_s = 500 / 1,15 = 430 \text{ MPa} = 43 \text{ kN/cm}^2;$$

$$1) k_s = \frac{D_s}{D} = \frac{64}{80} = 0,8$$

2) стойност на относителната натискава сила  $n$ :

$$n = \frac{N_{Ed}}{\pi R^2 f_{cd}} = \frac{3400}{\pi \cdot 40^2 \cdot 1,7} = 0,4.$$

$$3) \alpha_m = \frac{M_{Ed}}{f_{cd} D^3} = \frac{1390 \cdot 10^2}{1,7 \cdot 80^3} = 0,16$$

4) за стойностите на  $k_s = 0,8$ ,  $\alpha_m = 0,16$  и  $n = 0,4$  от таблица 1 се отчита  $\rho_{eff} = 50,46\%$ ;

5) площта на напречното сечение на общата надлъжна армировка е:

$$A_s = \rho_{eff} \pi R^2 \frac{f_{cd}}{f_{yd}} = \frac{50,46}{100} \pi \cdot 40^2 \cdot \frac{1,7}{43} = 100,3 \text{ cm}^2.$$

## ЛИТЕРАТУРА

- [1]. БДС EN 1992-1-1. Еврокод 2: Проектиране на бетонни и стоманобетонни конструкции. Част 1-1: Общи правила и правила за сгради, 2005.  
 [2]. Двайт, Г. Б. „Таблицы интегралов и другие математические формулы”, издателство „Наука”, Москва, 1973 г.  
 [3]. Хубчев, Д. „Стоманобетонни елементи с кръгло напречно сечение, подложени на огъване – усилия в бетона и армировката”, е-списание „Механика, транспорт, комуникации”, бр. 1 /2018 г.

## DESIGN OF REINFORCED CONCRETE ELEMENTS WITH CIRCULAR CROSS-SECTION SUBJECTED TO A BENDING MOMENT AND A COMPRESSION FORCE

**Dimitar Hubchev**  
[dhubchev@vtu.bg](mailto:dhubchev@vtu.bg)

*Todor Kableshkov University of Transport,*  
 158 Geo Milev Street, Sofia 1574,  
 BULGARIA

**Key words:** reinforced concrete structures with circular cross-section, ultimate moment resistance, cast-in-place piles

**Abstract:** Subject of the publication is design in ultimate limit states of reinforced concrete elements with circular cross-section and evenly distributed longitudinal reinforcement along the periphery subjected to a bending moment and a compression force.

*Circular cross-section is common in reinforced concrete elements such as building columns, bridge supports and cast-in-place piles. Most often with such elements the longitudinal reinforcement is evenly distributed along the periphery of the cross-section. When the elements are subjected predominantly to bending, part of the longitudinal reinforcement falls within the compression zone and works under compression together with the concrete, another part works on a tensile. Besides the deformations in the reinforcement, which is located near the neutral axis are elastic and the stress level is low, in reinforcement, which is away from the neutral axis can develop plastic deformation and the stress reach the yield strength. Taking all these factors into account makes it difficult to design reinforced concrete elements with circular cross-section.*

*The purposes of this publication are:*

- to determine the change in longitudinal force and bending moment in the reinforcement in areas where the deformations of the reinforcement are nonlinear;*
- to create an algorithm and to make an example table under this algorithm for determining the required reinforcement for elements with circular cross-section subjected to a bending moment and a compression force.*

*An example is given in the publication, which shows the order in determining the reinforcement.*