Механика
Транспорт
Комуникации
Научно списание http://www.mtc-aj.com

ISSN 1312-3823 (print)
ISSN 2367-6620 (online)
том 14, брой 3/2, 2016 г.
статия № 1405

ОПТИМАЛНА ФИЛТРАЦИЯ НА СИГНАЛ, ПРЕДАВАН В КАНАЛ СЪС СЛУЧАЙНИ ПАРАМЕТРИ

Галина Чернева
cherneva@vtu.bg

ВТУ "Тодор Каблешков"
София, 1574, ул. "Гео Милев" 158,
БЪЛГАРИЯ

Ключови думи: *оптимална филтрация, средноквадратична грешка, функционал, вариационнен метод*

Резюме: *В доклада е предложен и изследван качествен функционал, който описва оптималния филтър за сигнал в канал със случайни параметри. Ядрото на функционала се определя от импулсната характеристика на филтъра. Изследването е направено чрез теорията на вариационното смятане, при използван критерий за минимум на средноквадратичната грешка. Показано е, че оптималната линейна оценка зависи от корелационната функция и математическото очакване на входния сигнал, както и от взаимнокорелационната функция на входния и изходния сигнал.*

1. Въведение

Оптималнта филтрация на сигналите е процес, който се осъществява при определен критерий за оптималност [1,2], като основната цел е възможно най-доброто отделяне на полезния сигнал от смущенията. Известни са няколко критерия за оптималност [1]: за минимална пълна вероятност на грешката; за минимална средноквадратична грешка; обобщен критерий с отчитане на относителното тегло на грешка и др.

При филтрация на случайни процеси се прилага критерият за минимум на средноквадратичната грешка, който е добре познат [1,2,3,5]. Той се свежда до извеждане и решаване на уравнението на оптималния филтър, като класическият подход за това е разработен в [2,3]. Трудностите, свързани с решаването на интегралните уравнения за филтъра, са довели до развитието и на калмановата филтрация [1], която е удобен за компютърна реализация алгоритъм за оценка на състоянието на линейна система, при напълно определен обаче математичен модел.

В настоящата работа е получено уравнение за оптимален филтър за канал със случайни параметри, с времеви и честотно селективни затихвания, при използван критерий за минимум на средноквадратичната грешка. То е изведено като е приложен апаратът на вариационното смятане [4]. В основата на този подход е дефинирането на функционал, с който се описват качествените критерии на разглеждания процес, в случая на филтрацията на съобщенията. Функционалът зависи от интегрален оператор, свързан с определена функция в линейното нормирано сигнално пространство. Целта е да се определи ядрото на оптималния оператор, в случая този, който описва оптималния филтър. При него функционалът има екстремум и ядрото се определя от необходимите и достатъчни условия за екстремума. Така се получава интегралното уравнение, определящо импулсната характеристика на филтъра Характерна особеност е, че екстремумът е условен, т.е. задачата е с ограничения, които определят затворена област в сигналното пространство.

На база на използвания подход е доказано, че за определяне на оптималната линейна оценка е достатъчно априорното определяне на корелационната функция и математическото очакване на входния процес и взаимнокорелационната функция между полезния и входния сигнал.

2. Постановка на проблема.

Уравнението на филтрация се търси при следните допускания. Каналът за връзка, показан на фиг.1, е дискретен, с многолъчево разпространение на сигналите.

Смущението в канала е бял шум $n(t)$, с равномерен, непрекъснат и безкраен спектър, с относителна плътност на единица от честотната лента N_0.

На входа на филтъра постъпва адитивната смес сигнал и щум:

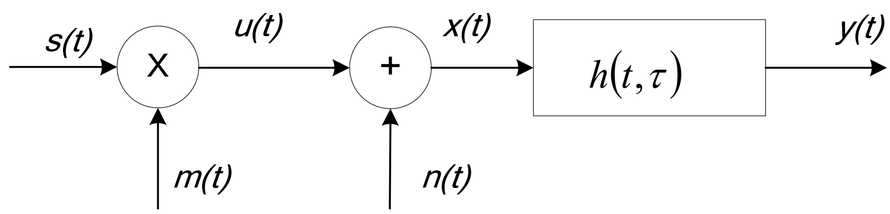
$$x(t) = \sum_{i=1}^{k} m_i(t) s(t-\tau_i) + n(t), \tag{1}$$

където $s(t)$ е входният сигнал, който принадлежи на енергийното метрично пространство на реалните сигнали $L_2(-\infty, \infty)$;

$i = 1 \div k$ е брой лъчи на разпространение на сигнала;

$m_i(t)$ е случаен нестационарен процес, който отчита мултипликативните смущения в канала;

τ_i е случайно закъснение на сигнала, с вероятностна плътност на разпределение $w_{\tau_i}(x)$.



Фиг.1. Структурна схема на канала за връзка

Входният сигнал и шумът $n(t)$ са нестационарни процеси с автокорелационни функции $B_s(t,\tau)$ и $B_n(t,\tau)$ и нулеви математически очаквания.

$B_{m_i}(t,\tau)$ и m_{0i} са автокорелационната функция и математическото очакване на мултипликативните смущения.

Процесите $s(t)$, $n(t)$, $m_i(t)$ и параметрите τ_i са некорелирани помежду си.

При тази постановка сигналът на изхода на филтъра е:

(2) $$y(t) = \int_{t_1}^{t_2} h(t,\tau)x(\tau)d\tau ,$$

където $h(t,\tau)$ е импулсната характеристика на филтъра

Съгласно вариационния подход [3], при използван критерий за минимум на средноквадратичната грешка, определящ мярката на съответствие между предаденото съобщение и неговата оценка, формирана от филтъра, се образува функционал, изразен чрез средната по ансамбъл реализация на квадрата на грешката:

(3) $$I = \sigma^2(t) = \langle [y(t) - s(t)]^2 \rangle \ .$$

Като се използва филтриращото свойство на δ-функцията и зависимост (2), функционалът (3) добива вида:

(4) $$I = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t-\tau) \langle \left[\int_{t_1}^{t_2} h(t,\tau)x(\tau)d\tau - s(\tau) \right]^2 \rangle d\tau == B_S(t,\tau) - 2\int_{t_1}^{t_2} h(t,\tau)B_{SX}(t,\tau)d\tau + \\ + \int_{t_1}^{t_2}\int_{t_1}^{t_2} h(t,\tau_1)h(t,\tau_2)B_X(\tau_1,\tau_2)d\tau_1 d\tau_2$$

3. Извеждане на уравнението на филтрация

Необходимото и достатъчно условие да има функционал (4) минимум, съгласно теоремата на Ойлер-Пуасон [2], се изразява чрез уравнението:

(5) $$\int_{t_1}^{t_2} h(t,\tau_1) \langle x(\tau_1)x(\tau) \rangle d\tau_1 - \langle s(t)x(\tau) \rangle = 0$$

Ако се заместят в уравнение (5) средните по ансамбъл реализации на сигналите с корелационните функции:

(6) $$\begin{aligned} B_x(t,\tau) &= \langle x(t)x(\tau) \rangle \\ B_{sx}(t,\tau) &= \langle s(t)x(\tau) \rangle \end{aligned},$$

то добива вида:

(7) $$\int_{t_1}^{t_2} h(t,\tau_1)B_x(\tau_1,\tau)d\tau_1 - B_{sx}(t,\tau) = 0 .$$

Корелационните функции $B_{sx}(t,\tau)$ и $B_x(t,\tau)$ могат да се разгледат като ядра на линейни интегрални оператори :

(8) $$\begin{aligned} B_1 &= \int_{t_1}^{t_2} B_x(t,\tau)f(\tau)d\tau \\ B_2 &= \int_{t_1}^{t_2} B_{sx}(t,\tau)f(\tau)d\tau \end{aligned} ,$$

където функцията $f(t) \in L_2$.

Уравнение (7) може да се запише в операторен вид като

(9) $KB_1 - B_2 = 0$,

където K е операторът на оптималния филтър.

От уравнение (9) следва, че:

(10) $K = B_2 B_1^{-1}$.

Ядрото на оператора (10) е равно на импулсната характеристика на филтъра:

(11) $$h(t,\tau) = \int_{t_1}^{t_2} B_{sx}(t,\tau) B_x^{-1}(t,\tau) d\tau \qquad .$$

Функциите $B_x^{-1}(t,\tau)$ и $B_{sx}(t,\tau)$, които участват в зависимост (11), могат да се изразят чрез зададените характеристики на изходния за канала сигнал *x(t)* от уравнение (1):

(12) $$B_x(t,\tau) = \langle x(t)x(\tau)\rangle = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} B_{m_i m_j}(t,\tau)\langle s(t-\tau_i)s(t-\tau_j)\rangle + B_n(t,\tau),$$

където:

(13) $$B_{m_i m_j}(t,\tau) = \begin{cases} B_{m_i}(t,\tau) + m_{0_i}(t)m_{0_i}(\tau), & i = j \\ m_{0_i}(t)m_{0_j}(\tau), & i \neq j \end{cases};$$

(14) $$\langle s(t-\tau_i)S(t-\tau_j)\rangle = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} w_{\tau_i}(x) w_{\tau_j}(y)[B_s(t-x,\tau-y)]dxdy.$$

Като се вземат пред вид зависимости (13) и (14), следва, че автокорелационната функция на сигнала *x(t)* е:

(15) $$B_x(t,\tau) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} B_{m_i m_j}(t,\tau)\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} w_{\tau_i}(x) w_{\tau_j}(y)[B_s(t-x,\tau-y)]dxdy + B_n(t,\tau)$$

По аналогичен начин се получава и взаимокорелационната функция между полезния и изходния сигнал:

(16) $$B_{sx}(t,\tau) = \sum_{i=1}^{n}\int_{-\infty}^{\infty} w_{\tau_i}(x) m_{0_i}(\tau) B_s(t,\tau-x)dx$$

Минимумът на функционал (4), т.е. минималната средноквадратична грешка, се изразява като:

(17) $$I_{\min} = \sigma^2(t) = B_s(t,\tau) - \int_{t_1}^{t_2} h(t,x) B_{sx}(t,x)dx.$$

След заместване на израз (11) в (17), се получава окончателно:

(18) $$\sigma^2(t) = B_s(t,\tau) - \int_{t_1}^{t_2}\int_{t_1}^{t_2} B_{sx}(t,\tau) B_x^{-1}(x,\tau) B_{sx}(t,x) dxd\tau,$$

където корелационните функции $B_{sx}(t,\tau)$ и $B_x(t,\tau)$ са определени със зависимости (15) и (16). Целесъобразно е Функцията $B_x^{-1}(t,\tau)$ да се определя за всеки конкретен случай, в матричен вид, като обратна на матрицата $B_x(t,\tau)$.

4. Заключение

Както следва от предложения в работата подход, за определяне на оптималната линейна оценка е необходимо априорното определяне на корелационната функция и математическото очакване на входния процес и взаимнокорелационната функция между полезния и входния сигнал. Всяка друга статическа информация е ненужна. От тук следва, че полученият алгоритъм за синтез на оптимален филтър при разглежданите условия ще бъде оптимален и при произволни разпределения на сигнала и смущенията.

В този смисъл, използваният в настоящата статия вариационен метод за определяне уравнението на филтрация, е по-общ и може да се разглежда като обобщение на корелационния и спектрален подход за изграждане на оптимални приемници, при който да се постигнат по-високи характеристики на качеството на предаване на информация.

Литература

[1] Ненов Г. Сигнали и системи. С. Нови знания, 2014.

[2] Колмогоров А. Н. Интерполирование и экстраполирование стационарных случайных последовательностей. М. Изв. АН. 1975.

[3] Wiener N. The interpolation, extrapolation and smoothing of stationary time series. NJ.Wiley.1979.

[4] Чернева Г. Формиране и изследване на сигнали, съгласувани с комуникационни канали. Автореферат за присъждане на ОНС „доктор".2007.

[5] Петкова Н. Изследване на влиянието на стойностите на елементите, изграждащи аналогов лентов филтър в MATLAB. Сборник с конкурсни теми по проект BG051PO001-3.1.09-0006 „Система за кариерно развитие на академичния състав на Технически университет София (СиКРАС-ТУС)", стр. 68-76, София, 2014.

OPTIMAL FILTERING OF A SIGNAL TRANSMITTED IN CHANNEL WITH RANDOM PARAMETERS

Galina Cherneva
cherneva@vtu.bg

Todor Kableshkov University of Transport
Sofia, 158 Geo Milev Str
BULGARIA

Key words: *optimal filter , mean square error, functional, variation method*

Abstract: *In this work is proposed and tested a quality functional, which describes the optimal filter for a signal in channel with random parameters. The core of the functional is determined by the impulse response of the filter. The research was done by the theory of variation calculus, using a criterion for a minimum of mean square error. It has been shown that the optimal linear evaluation depends on the correlation function and the mathematical expectation of the input signal and by a mutual correlation function of the input and output signal.*