Механика
Транспорт
Комуникации
Научно списание http://www.mtc-aj.com

ISSN 1312-3823 (print)
ISSN 2367-6620 (online)
том 14, брой 3/2, 2016 г.
статия № 1371

ПАРАМЕТРИЧНИ ВЕРОЯТНОСТНИ МОДЕЛИ

Райна Алашка, Драго Михалев
alraina@abv.bg , michalev@abv.bg

ВТУ „Тодор Каблешков", София 1574, ул. „Гео Милев"158, БЪЛГАРИЯ

Ключови думи: *Параметрични вероятности модели, модел на Раш, модел на Бирнбаум, Вероятностно моделиране, Образование.*

Резюме: *Представени са четирите параметрични модела, прилагани в образованието. Те използват основните параметри на заданието. Предложен е нов петпараметричен модел. При него участва и параметърът k - „компетентност". Разгледани са два вида компетентност: добра (присъща) компетентност и лоша (привнесена) компетентност.*

1. ЕДНОПАРАМЕТРИЧЕН МОДЕЛ НА РАШ

Възможността произволно избран изпитван (студент, ученик и др.) да реши дадена тестова задача зависи основно от два фактора: подготвеността на тестирания (способността) и трудността на тестовата задача. В общия случай тази възможност има вероятностен характер и представлява функция на два аргумента:

(1) $p = p(s,t)$,

където:

s – подготвеността (способността) на тестирания;

t – трудността на тестовата задача.

Такава функция се нарича функция на успеха. Най-опростеният модел на такава функция е разработен в началото на 60-те години от датския математик Г. Раш и има вида:

(2) $$p(s,t) = \frac{s}{s+t} = \frac{1}{1+\frac{t}{s}}.$$

Аргументите на тази функция се явяват латентни параметри, които не можем да измерим непосредствено. Ще отбележим, че функцията е хомогенна от първи ред и нейната стойност зависи не от конкретните значения на s и t, а само от тяхното отношение. Въвеждаме следните означения:

(3) $$\begin{array}{ll} \ln s = X, & s = e^X \\ \ln t = T\,, & t = e^T \end{array}.$$

При тези означения функцията на успеха (2) приема вида:

(4) $$p(X,T) = \frac{1}{1+e^{T-X}}.$$

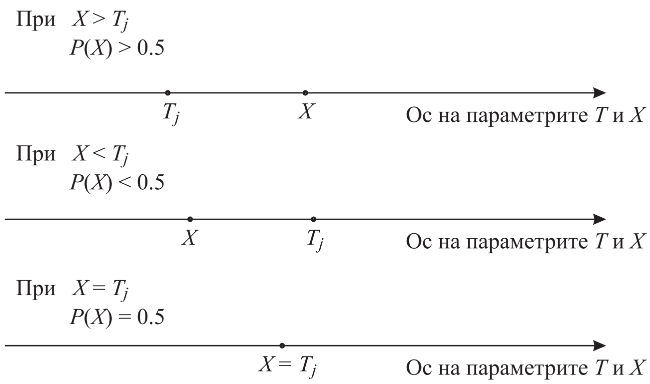
Функцията (4) се нарича „Модел на Раш“ [3]. Вероятността произволно избран *i*–ти участник да отговори вярно на *j*–тата задача, зависи само от един параметър – разликата $X_i - T_j$. Затова този модел се нарича още „Еднопараметричен вероятностен модел“.

Вероятността *p* като функция на *X* при фиксирана трудност на задача $T = T_0$ се нарича *характеристична функция* на задачата и има вида:

(5) $$p(X) = \frac{1}{1+e^{T_0 - X}},$$

Тя характеризира възможността участници с различни способности да решат или не решат задача с трудност T_0. Графиката на характеристичната функция на задачата се нарича *характеристична крива* на задачата.

В случая, когато способността на участника е равна на трудността на задачата, вероятността да се даде верен отговор на задачата е 0,5, т.е. при $X = T_j$, $p(X) = 0,5$.



Фиг.1

Параметърът T_j определя положение на характеристичната крива по отношение на скалата на способността. Колкото по-голяма е трудността на задачата T_j, толкова по-голяма способност е необходима за да се получи вероятността за верен отговор 0,5. Обратно, колкото по-малка е трудността, толкова по-малка способност е необходима за да се получи вероятността за верен отговор 0,5.

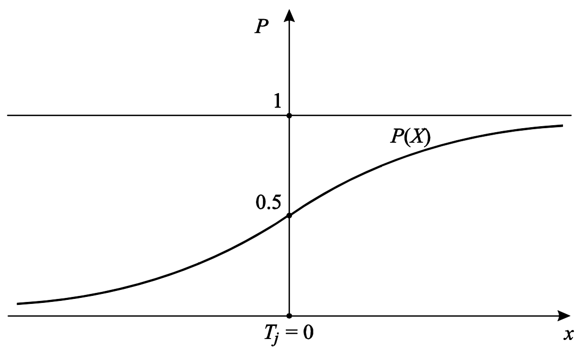
Средната стойност на параметъра T_j за всички задачи, обикновено се оразмерява с 0. Тогава границите на изменение на параметъра T_j варират между – 3 и 3. Стойности на T_j близки до – 3 съответстват на много лесни задачи, стойности на T_j близки до 3 – на много трудни задачи.

Еднопараметричният вероятностен модел е единственият, при който лица с една и съща способност имат един и същи действителен бал.

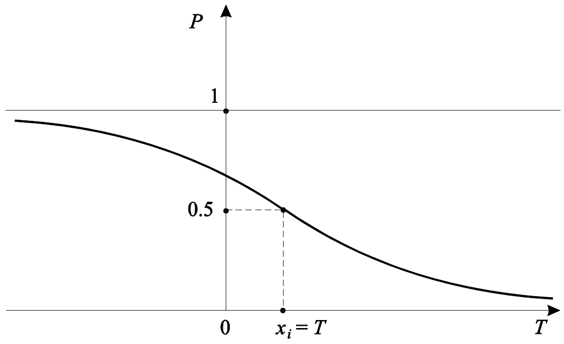
Вероятността *p* като функция на *T* при фиксирана способност $X = x_i$ се нарича *характеристична функция* на *i* - я изпитван и има вида:

(6) $$p(T) = \frac{1}{1+e^{T - x_i}}.$$

На Фиг. 2 и Фиг. 3 са представени съответно характеристичните криви на задача с параметър на трудност 0 и на изпитван със способност $x_i = T$.



Фиг.2



Фиг.3

2. ДВУПАРАМЕТРИЧЕН МОДЕЛ НА БИРНБАУМ

Вторият най-широко използван модел е двупараметричния вероятностен модел („Модел на Бирнбаум”) [2]. При него се добавя втори параметър a_j – дискриминация на задачата.

Характеристичната функция, на която и да е задача има вида:

$$p(X) = \frac{1}{1+e^{-a_j\left(X-T_j\right)}} . \quad (7)$$

Параметърът a_j определя тангенса на ъгъла (наклона) на допирателната в точката $X = T_j$ на характеристичната крива. Колкото по-голяма е дискриминацията на задачата a_j, толкова по-стръмна е графиката на характеристичната крива и следователно по–добре разграничава участниците със способности близки до T_j. Обратно, колкото по-малка е дискриминацията на задачата a_j, толкова по-полегата е графиката на характеристичната крива и следователно по–лошо разграничава участниците със способности близки до T_j. Теоретичните граници на изменение на дискриминацията на задачата a_j са от $\left(-\infty;+\infty\right)$, но практически тя е ограничена в интервала $\left(0;+2,8\right)$. На Фиг. 4 са представени две двупараметрични характеристични криви с един и същи параметър на трудност T_j при дискриминация $a_j = 1$ и $a_j > 1$.

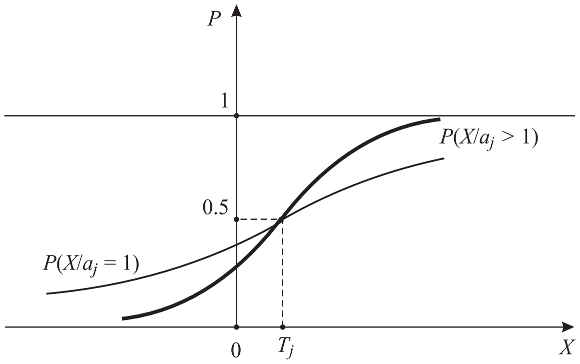
3. ТРИПАРАМЕТРИЧЕН МОДЕЛ НА БИРНБАУМ

Следващият модел, който ще разгледаме е трипараметричният вероятностен модел. При него се добавя още един параметър c_j – за налучкване на верния отговор на задачата. Моделът е разработен от А. Бирнбаум [2], за да отрази обичайното в тестовата практика обстоятелство – при липса на необходимата подготовка, участникът прибягва до стратегия за налучкване на правилния отговор.

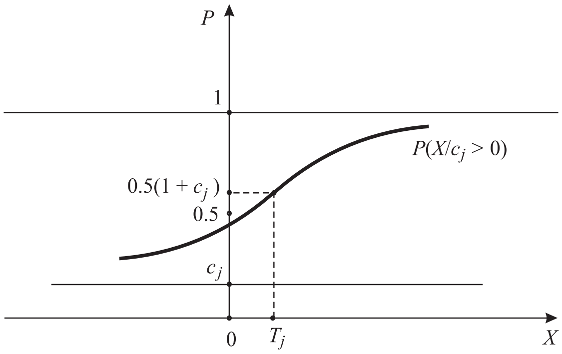
Характеристичната функция на всяка задача е от вида:

$$p(X) = c_j + (1-c_j)\cdot\frac{1}{1+e^{-a_j\left(X-T_j\right)}} . \quad (8)$$

Параметърът c_j се дефинира като долна асимптота на характеристичната крива, която вече не съвпада с абсцисната ос, а е издигната над нея, т.е. $p(X) > 0$. Теоретичните граници на изменение на параметъра c_j са от $\left(0;1\right)$, но практически стойности над 0,10 се считат за неприемливи. На Фиг. 5 е представена трипараметрична характеристична крива с параметър на налучкване c_j.



Фиг.4



Фиг.5

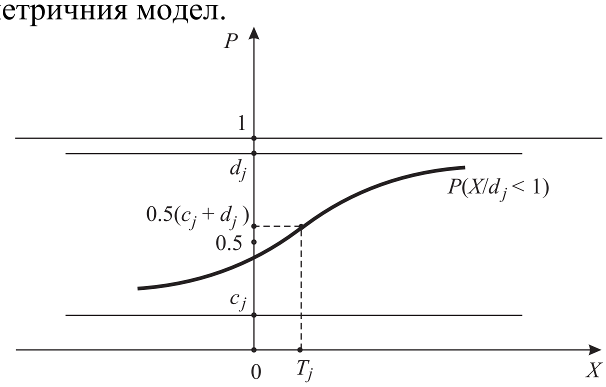
4. ЧЕТИРИПАРАМЕТРИЧЕН МОДЕЛ

Четвъртият модел, който ще разгледаме, е четирипараметричният вероятностен модел. При него освен описаните по-горе параметри, се добавя и параметъра d_j – „невнимателност”, „разсеяност”. Моделът е разработен от М. Бартън и Ф. Лорд [1], за да отрази обичайните в тестовата практика обстоятелства – невнимателност, разсеяност, слаба мотивация, небрежност, умора и други. За параметрите е изпълнено неравенството: $0 \le c_j \le d_j \le 1$.

Характеристичната функция на всяка задача е от вида:

$$p(X) = c_j + (d_j - c_j) \cdot \frac{1}{1 + e^{-a_j(X - T_j)}}. \tag{9}$$

Параметърът d_j се дефинира като горна асимптота на характеристичната крива, която вече не съвпада с правата $p(X) = 1$, а е разположена под нея, т.е. $p(X) < 1$. Теоретичните граници на изменение на параметъра d_j са от $(0;1)$, но практически стойности под 0,90 се считат за неприемливи. На Фиг. 6 е представена характеристична крива за четирипараметричния модел.



Фиг.6

5. ПЕТПАРАМЕТРИЧЕН МОДЕЛ

Ще си позволим да предложим петпараметричен вероятностен модел. При него, освен описаните в предходните вероятностни модели параметри, участва и пети параметърът k - „компетентност”. Въвеждането на този параметър се налага и от силното развитие в последните години на комуникационната техника. Има два вида компетентност: добра (присъща) компетентност и лоша (привнесена) компетентност.

Параметърът за „добрата“ компетентност показва наличните от предишни обучения компетентности на изпитваните, а при задачите това са задачи, които предполагат познания известни от преди етапа на обучение. Такива могат да бъдат за изпитваните например: студенти със завършено преди това друго висше образование, където е изучаван материалът или част от материала; студенти със завършена математическа гимназия; с успешно участие на олимпиади със съответната подготовка и други. Отнася се за ученици, които са подбирани на предишен етап с по-високи показатели и които изучават същия материал, за който са изпитвани, с по-голям хорариум. При задачите се появява, когато задаваме задачи, характерни за ученици от по-нисък клас за пробация от ученици в по-висок клас и други.

Параметърът за „лошата“ компетентност показва преписването, подсказването, изтичането на информация за теста (изпита) и др. Тази компетентност е привнесена към изпитваните от други лица и води до изкривяване на получената информация от изпитването. Ще споменем за случая с резултатите от матурите на учениците от Софийска Математическа Гимназия (СМГ) и учениците от Ардино. Това е типичен случай на съпоставяне на двата вида компетентност: „присъща“ за тези от СМГ и „привнесена“ за тези от Ардино. Всъщност учениците от СМГ се конкурират с учителите от Ардино. Друг пример за „лоша“ компетентност е теоретичният изпит за шофьори и свързаната и разкрита корупция при него. Срещу привнесената компетентност битката е преди всичко с технически и административни мерки. Но въведеният параметър k - „компетентност” дава възможност да я отчитаме. Ще посочим само два от възможните начини за противодействие на „привнесената” компетентност. При първия начин това се постига като се ограничи времето за решаване на част от задачите и по този начин се ограничи и възможността за получаване на външна информация. При втория начин се разместват местата на възможните отговори за изпитваните, според заеманото от тях място. При четири възможни отговора, от които да се избере правилният отговор, възможностите за всяка задача са $4!=1.2.3.4=24$. Примерно при национално външно оценяване, ако учениците са до 24 в стая, то всеки ученик ще има различна подредба на възможните отговори.

Характеристичната функция на всяка задача за петпараметричния вероятностен модел е от вида:

$$(10)\qquad p(X)=k_j+(1-k_j)\left(c_j+(d_j-c_j)\cdot\frac{1}{1+e^{-a_j\left(X-T_j\right)}}\right).$$

Стойностите на параметъра k_j се изменят в интервала $[0,1]$, но при стойности по-големи от 0,5, те на практика не се прилагат, защото натежават във формулата.

Ще пресметнем стойностите на горната и долната асимптота при този модел и критичната стойност, в точката, в която функцията сменя изпъкналостта си $(X=T_j)$.

За долната асимптота полагаме втория член в скобите от (10) на нула и получаваме:

$$k_j+(1-k_j)c_j=c_j+k_j-c_jk_j.$$

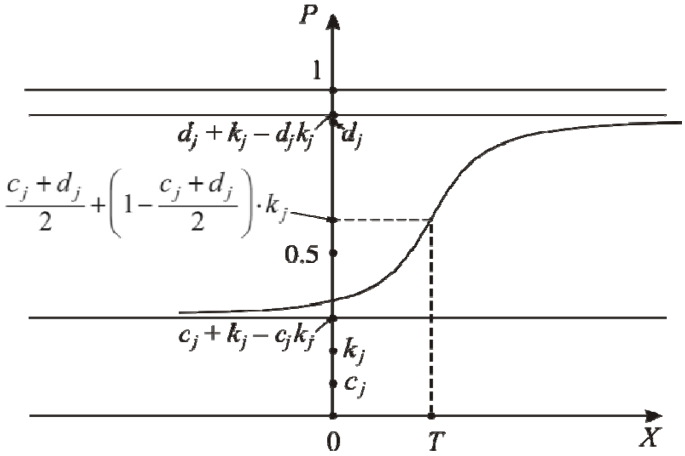
За горната асимптота полагаме втория член в скобите от (10) на единица и получаваме:

$$k_j+(1-k_j)(c_j+d_j-c_j)=d_j+k_j-d_jk_j.$$

За критичната стойност полагаме втория член в скобите от (10) на 0,5 и получаваме:

$$k_j+(1-k_j)(0,5.(c_j+d_j))=\frac{c_j+d_j}{2}+\left(1-\frac{c_j+d_j}{2}\right)\cdot k_j.$$

На Фиг. 7 е представена характеристична крива за петпараметричния модел.



Фиг.7

Ще пресметнем някои гранични стойности на описаните характеристики при този модел.

Ако положим $k_j = 0$, тогава получаваме четирипараметричния модел.

Ако положим $k_j = 1$, тогава получаваме, че горната и долната асимптота съвпадат и те са равни на едно.

Знаем, че за параметрите е изпълнено неравенството: $0 \le c_j \le d_j \le 1$.

Ако положим параметъра $c_j = 0$, тогава получаваме за долната асимптота, че тя е равна на k_j, критичната стойност е $k_j + (1 - k_j)0,5.d_j = 0,5.d_j + (1 - 0,5.d_j)k_j$.

Ако положим $d_j = 1$, тогава получаваме, че горната асимптота е равна на едно.

Ако положим $c_j = 0$ и $d_j = 1$, тогава критичната стойност е $(1 + k_j).0,5$.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Barton M.A., Lord F.M.. An upperasymptote for the three-parameter logistic item-response model. Princeton,N.J.: Educational Testing Service, 1981.
[2] Birnbaum A., Some Latent Trait Models and Their Use in Inferring an Examinee’s Ability. In F.M. Lord and M.R. Novick. Statistical Theories of Mental Test Scores. Readinf Mass.: Addison-Wesley, 1968. Ch. 17-20. –p 397-479.
[3] Rasch G. Probabilistic Models for Some Intelligence and Attainment Tests. Copenhagen, 1960, Danisch Institute of Educational Research. (Expanded edition, Chicago, 1980, The University of Chicago Press).

PARAMETRIC PROBABILISTIC MODELS

Rayna Alashka, Drago Michalev
alraina@abv.bg , michalev@abv.bg

Todor Kableshkov Univercity of Transport, 1574 Sofia, 158 ‘Geo Milev’ Street, BULGARIA

Key words: *Parametric probabilistic models, Rasch-model, Birnbaum-model, Item Response Theory, Education.*

Abstract: *Four parametric probabilistic models applied in education are presented. They use basic parameters of the job. A new five-parameter model is proposed. It involves a new parameter - "competence". Two types of competence are discussed: good competence and poor competence.*