Механика Транспорт Комуникации

ISSN 1312-3823 (print)
ISSN 2367-6620 (online)
том 14, брой 3/2, 2016 г.

Научно списание http://www.mtc-aj.com **статия № 1369**

ПРИЛОЖЕНИЕ НА ЛОГИСТИЧНИ ВЕРОЯТНОСТНИ МОДЕЛИ В ОБРАЗОВАНИЕТО ЗА ОПТИМАЛНО ОПРЕДЕЛЯНЕ НА ПАРАМЕТРИТЕ В МОДЕЛИТЕ НА РАШ И НА БИРНБАУМ

Райна Алашка
alraina@abv.bg

ВТУ „Тодор Каблешков", София 1574, ул. „Гео Милев"158, БЪЛГАРИЯ

Ключови думи: *Логистични вероятности модели, Вероятностни модели, Модел на Раш, Модел на Бирнбаум, Образование.*

Резюме: *Логистичните вероятностни модели се използват основно в икономиката. Ще представим тяхно приложение в образованието. Ще покажем как с използването им можем да определим оптималните параметри в еднопараметричния модел на Раш и двупараметричния модел на Бирнбаум, които в последните години широко се използват в образованието.*

1. ОСНОВНИ ОЗНАЧЕНИЯ И ДЕФИНИРАНЕ НА ВЕРОЯТНОСТНИТЕ МОДЕЛИ.

В последното десетилетие освен класическата теория на тестовете, например [1], широко и все по–често се прилага теорията на вероятностното моделиране (Item Response Theory) за оценка способностите на изпитваните. За основополагащ се счита трудът на датският математик Раш [3]. По–късно теорията е развита от Бирнбаум [2]. Първият автор използва един параметър – трудност, а вторият автор използва в модела си два параметъра – трудност и дискриминация (разграничителна способност). Логистичните вероятностни модели се използват предимно за оценки в икономиката. Ще представим тяхно приложение в образованието за определяне на параметри на заданието.

Под термина **задание** ще разбираме задача, тест, изпит по математика или друга учебна дисциплина.

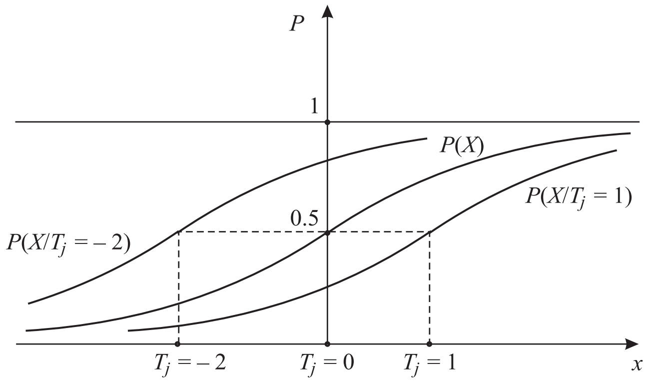
Нека означим с X способността на изпитвания, а с T трудността на заданието.

При **еднопараметричния модел** на Раш вероятността изпитван със способност X да се справи със задание с трудност T се дава с формулата:

(1) $$P(X)=\frac{1}{1+e^{-(X-T)}} .$$

Тя характеризира възможността участници с различни способности да решат или не решат задание с трудност T. Графиката на тази функция се нарича характеристична крива на заданието.

На Фиг. 1 са представени три характеристични криви с параметър на трудност –2, 0 и 1.



Фиг. 1.

Параметърът T_j определя положение на характеристичната крива по отношение на скалата на способността. Колкото по-голяма е трудността на заданието T_j, толкова по-голяма способност е необходима, за да се получи вероятност за верен отговор 0,5. Обратно, колкото по-малка е трудността, толкова по-малка способност е необходима, за да се получи вероятност за верен отговор 0,5.

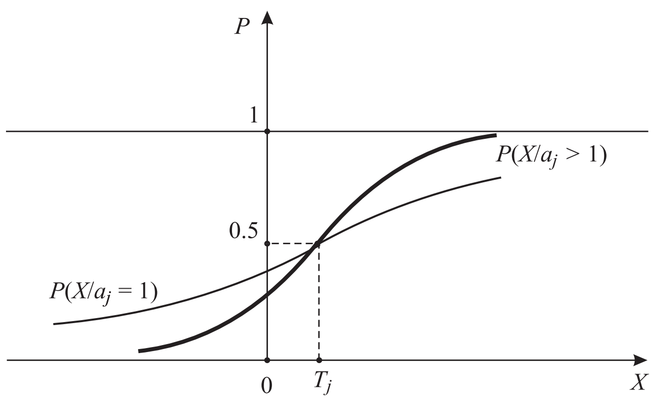
Друг широко използван модел е **двупараметричният** вероятностен модел на Бирнбаум. При него се добавя втори параметър *a* – дискриминация на заданието.

Вероятността изпитван със способност *X* да се справи със задание с трудност *T* и дискриминация *a* се дава с формулата:

(2) $$P\left(X\right)=\frac{1}{1+e^{-1,7a(X-T)}}\ .$$

Параметърът $a=a_j$ определя тангенса на ъгъла (наклона) на допирателната в точката $X=T_j$ на характеристичната крива. Колкото по-голяма е дискриминацията на задачата a_j, толкова по-стръмна е графиката на характеристичната крива и следователно по–добре разграничава участниците със способности близки до T_j. Обратно, колкото по-малка е дискриминацията на задачата a_j, толкова по-полегата е графиката на характеристичната крива и следователно по–лошо разграничава участниците със способности близки до T_j.

На Фиг. 2 са представени две двупараметрични характеристични криви с един и същи параметър на трудност T_j при дискриминация $a_j=1$ и $a_j>1$.



Фиг.2

При **логистичните вероятностни** модели за вероятността за успех имаме:

(3) $$P(X)=\frac{e^{L(X)}}{1+e^{L(X)}}=\frac{1}{1+e^{-L(X)}}.$$

Вероятността за неуспех се оценява с израза:

(4) $$1-P(X)=\frac{1}{1+e^{L(X)}}.$$

Тъй като уравненията (3) и (4) са нелинейни по отношение на параметрите си, приложението на метода на най-малките квадрати (МНМК) за оценка на параметрите не е възможно пряко. Проблемът е само привиден. Ще разгледаме така наречената шансова пропорция.

Шансовата пропорция при логистичните вероятностни модели се дефинира като:

(5) $$\frac{P(X)}{1-P(X)}=\frac{1+e^{L(X)}}{1+e^{-L(X)}}=e^{L(X)}.$$

Логаритмуваме с натурален логаритъм двете страни на равенство (5) и получаваме:

$$L(X)=\ln\frac{P(X)}{1-P(X)}.$$

В литературата L се нарича **logit** (логит), затова тези модели се наричат logit-модели.

Нека имаме m групи, като X_i е способността, определена от предишни изследвания, на група i. Съответстващите честоти на успешно положилите заданието е $\hat{P}_i=\frac{n_i}{N_i}$, като $\sum_{i=1}^{m}N_i=n$. Броят на всички изпитвани в група i е N_i, а броят на успешно положилите заданието в групата е n_i. Общият брой на изпитваните е n.

Тогава за логита имаме $L(X_i)=L_i=\ln\frac{\hat{P}_i}{1-\hat{P}_i}$.

2. ОПРЕДЕЛЯНЕ НА ОПТИМАЛНИЯ ПАРАМЕТЪР В МОДЕЛА НА РАШ.

Ще конструираме логистичен вероятностен модел, като търсим L от вида $L_i=X_i-b_0$, където X_i е способността на група i. Тогава за вероятността имаме:

(6) $$P=\frac{1}{1+e^{-(X-b_0)}}.$$

Ще използваме метода на най–малките квадрати (МНМК) вж. [4], [5] за намиране на коефициента b_0. Последователно получаваме равенствата:

$$\sum_{i=1}^{m}L_i=\sum_{i=1}^{m}X_i-\sum_{i=1}^{m}b_0;$$

$$mb_0=\sum_{i=1}^{m}X_i-\sum_{i=1}^{m}L_i;$$

$$b_0=\frac{\sum_{i=1}^{m}X_i}{m}-\frac{\sum_{i=1}^{m}L_i}{m}=\overline{X}-\overline{L}.$$

С $\overline{X}$ отбелязваме средното аритметично на X_i, а с $\overline{L}$ отбелязваме средното аритметично на L_i.

Заместваме L_i с неговото равно и получаваме:

$$b_0 = \overline{X} - \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m} \ln \frac{\hat{P}_i}{1-\hat{P}_i} = \overline{X} - \frac{1}{m} \ln \prod_{i=1}^{m} \left[\frac{\hat{P}_i}{1-\hat{P}_i} \right] = \overline{X} - \ln \left(\overline{\frac{\hat{P}}{1-\hat{P}}} \right)_G .$$

Използвахме означението $\overline{V_G} = \sqrt[m]{V_1.V_2....V_m}$ за средното геометрично на V_i.

Горното равенство може да се запише и във вида:

$$b_0 = \overline{X} - \ln \left(\overline{\frac{\hat{P}}{1-\hat{P}}} \right)_G = \overline{X} - \ln \left(\overline{\hat{P}} \right)_G + \ln \left(\overline{1-\hat{P}} \right)_G .$$

Сравняваме получения резултат при този логит-модел от (6) с еднопараметричния модел на Раш, зададен с (1). Получаваме, че те ще съвпадат, ако за трудността е изпълнено:

(7) $$T = b_0 = \overline{X} - \ln \left(\overline{\hat{P}}_G \right) + \ln \left(\overline{\left(1-\hat{P} \right)_G} \right).$$

Резултатът показва, че при тези способности на изпитваните, за да имаме най-малка средноквадратична грешка, трудността на заданието трябва да се задава с формула (7). Това е препоръчителната трудност.

Директното прилагане на МНМК може да доведе до неточности, поради различния вид на отклоненията ε_i. Нарушено е условието за хомоскедастицитет (за равенство на стандартните отклонения при различни стойности на факторната променлива).

Затова пресмятаме теглата, които имат вида:

(8) $$\sqrt{W_i} = \sqrt{N_i \hat{P}_i (1-\hat{P}_i)} .$$

Сега ще приложим обобщения МНМК.

Претегляме двете страни на матричното уравнение $L_i = X_i - b_0$ с теглата (8) и получаваме:

$$L_i \sqrt{W_i} = X_i \sqrt{W_i} - b_0 \sqrt{W_i} .$$

Прилагаме обобщения МНМК и получаваме системата:

$$\sum_{i=1}^{m} L_i \sqrt{W_i} = \sum_{i=1}^{m} X_i \sqrt{W_i} - \sum_{i=1}^{m} b_0^* \sqrt{W_i} .$$

Изразяваме b_0^* и намираме трудността:

$$T = b_0^* = \frac{\sum_{i=1}^{m} X_i \sqrt{W_i}}{\sum_{i=1}^{m} \sqrt{W_i}} - \frac{\sum_{i=1}^{m} L_i \sqrt{W_i}}{\sum_{i=1}^{m} \sqrt{W_i}} .$$

Получават се претеглени средни аритметични.

3. ОПРЕДЕЛЯНЕ НА ОПТИМАЛНИТЕ ПАРАМЕТРИ В ДВУПАРАМЕТРИЧНИЯ МОДЕЛ НА БИРНБАУМ.

Сега ще разгледаме двупараметричния модел на Бирнбаум. При него вероятността се задава с формула (2). Означаваме $L = \ln\frac{P}{1-P}$

Намираме, че е в сила следната формула:

$$L = 1,7.a(X-T) = 1,7.a.X - 1,7.a.T \ .$$

За определяне на оптималните параметри конструираме логистичен вероятностен модел, като търсим $L = \ln\frac{P}{1-P}$ от вида $L_i = b_1 X_i + b_0$, където X_i е способността на група i. Тогава за вероятността имаме:

$$(9) \qquad P = \frac{1}{1+e^{-(b_1 X + b_0)}} \ .$$

Коефициентите b_0 и b_1 се получават по метода на най-малките квадрати (МНМК) вж. [4], [5]. Те са решения на системата:

$$\left| \begin{array}{llll} b_0.m & + \ b_1\sum_{i=1}^{m} X_i & = & \sum_{i=1}^{m} L_i \\ b_0\sum_{i=1}^{m} X_i & + \ b_1\sum_{i=1}^{m} X_i^2 & = & \sum_{i=1}^{m} (X_i L_i) \end{array} \right.$$

Сравняваме (2) и (9) и получаваме, че за да са еднакви трябва да е изпълнено:

$$b_1 = 1,7.a \qquad и \quad b_0 = -1,7.a.T \ .$$

Тогава за дискриминацията и трудността получаваме:

(10) $\quad a = \frac{b_1}{1,7}$ е дискриминацията,

(11) $\quad T = -\frac{b_0}{1,7.a} = -\frac{b_0}{b_1}$ е трудността.

Резултатът показва, че при тези способности на изпитваните, за да имаме най-малка средноквадратична грешка, трудността на заданието трябва да се задава с формула (11), а дискриминацията с формула (10). Това са препоръчителната трудност и препоръчителната дискриминация.

Тук приложихме логит-модела без тегла. Възможно е да се приложи обобщеният МНМК с тегла $\sqrt{W_i} = \sqrt{N_i \hat{P}_i (1-\hat{P}_i)}$, както това е направено за модела на Раш, така ще се прецизират коефициентите от МНМК.

Коефициентите b_0^* и b_1^* намираме от системата:

$$\left| \begin{array}{llll} b_0^*\sum_{i=1}^{m} c_{0i}^2 & + \ b_1^*\sum_{i=1}^{m} c_{0i}c_{1i} & = & \sum_{i=1}^{m} c_{0i}L_i^* \\ b_0^*\sum_{i=1}^{m} c_{0i}c_{1i} & + \ b_1^*\sum_{i=1}^{m} c_{1i}^2 & = & \sum_{i=1}^{m} c_{1i}L_i^* \end{array} \right. ,$$

където:

$$L_i\sqrt{W_i} = L_i^* \ ; \ \sqrt{W_i} = c_{0i} \ ; \ X_i\sqrt{W_i} = c_{1i} \ .$$

Тогава за дискриминацията и трудността получаваме:

$$a = \frac{b_1^*}{1,7} \quad \text{е дискриминацията,}$$

$$T = -\frac{b_0^*}{1,7.a} = -\frac{b_0^*}{b_1^*} \quad \text{е трудността.}$$

ЛИТЕРАТУРА

[1] Стоименова Е., Измерителни качества на тестовете, София, 2000 г.

[2] Birnbaum A., Some Latent Trait Models and Their Use in Inferring an Examinee's Ability. In F.M. Lord and M.R. Novick. Statistical Theories of Mental Test Scores. Readinf Mass.: Addison-Wesley, 1968. Ch. 17-20. –p 397-479.

[3] Rasch G. Probabilistic Models for Some Intelligence and Attainment Tests. Copenhagen, 1960, Danisch Institute of Educational Research. (Expanded edition, Chicago, 1980, The University of Chicago Press).

[4] Михалев Д., Алашка Р. Теория на вероятностите и статистика, София, 2012 г.

[5] Улучев Р., Михалев Д., Приложна математика, ВТУ „Тодор Каблешков", София, 2008 г.

APPLICATION OF LOGISTIC PROBABILISTIC MODELS IN EDUCATION FOR OPTIMAL DETERMINATION OF THE PARAMETERS IN THE MODEL OF RASCH AND BIRNBAUM

Rayna Milkova Alashka
alraina@abv.bg

Todor Kableshkov Univercity of Transport,
1574 Sofia, 158 'Geo Milev' Street,
BULGARIA

Key words: *Logistic probabilistic models, Logit-model, Rasch-model, Birnbaum-model, Item Response Theory, Education.*

Abstract: *Logistic probabilistic models are used primarily in economics. We will present their application in education. We will show how their use can determine the optimal parameters in the Rasch and Birnbaum models, which in recent years are widely used in education.*