Механика
Транспорт
Комуникации
Научно списание

ISSN 1312-3823
брой 1, 2003 г.
статия № 0013
http://www.mtc-aj.com

МАТЕМАТИЧЕСКИ МОДЕЛИ НА МИГНОВЕНИ КОМУТАЦИОННИ ПРОЦЕСИ В НЕЛИНЕЙНИ ЕЛЕКТРИЧЕСКИ ВЕРИГИ

Росица Ангелова **Тодор Гичев**
rositsa_angelova@yahoo.com

ВТУ"Т. Каблешков", УАСГ-София
София 1574, ул. Гео Милев 158, София 1421, бул. Хр. Смирненски 1, България

Ключови думи: *комутационен процес, начални условия, нелинейна верига*
Резюме: *В работата се разглеждат мигновени комутационни процеси в два типа нелинейни електрически вериги. Дадени са съответни теореми, чрез които се характеризира поведението на параметрите на веригите в края на мигновения процес. Привеждат се примери за вериги от двата типа.*

При анализа на мигновени комутационни процеси в линейни електрически вериги се използват различни подходи за определяне на началните условия за процеса, следващ непосредствено след мигновената комутация и за интерпретиране на изменението на енергията в комутиращия елемент[1]. За решаването на тези проблеми в [2-4] се използват апроксимиращи редици от процеси в реални интервали, които се свиват до момента, в който се реализира мигновеният процес. Използвайки същият подход, в настоящата работа се предлагат математически модели на мигновени комутационни процеси в нелинейни вериги и върху конкретни примери се показва как с помощта на общи теореми се решават основните проблеми на мигновената комутация.

Най-напред при $T \in (t_0, T_0)$ и $t \in [t_0, T)$ да разгледаме системата от обикновени диференциални уравнения

(1) $$\frac{dx}{dt} = x\alpha_T(t) + g_T(x, y, t)$$

$$\frac{dy}{dt} = Bx\alpha_T(t) + h_T(x, y, t)$$

с начални условия

(2) $x(t_0) = x_0, \quad y(t_0) = y_0 .$

В системата (1) x е скаларна променлива, а y е n-мерна променлива; B е постоянна матрица-стълб с n реда; $g_T(x,y,t)$ е скаларна функция, а $h_T(x,y,t)$ е функция матрица-стълб с n реда. Скаларната функция $\alpha_T(t)$ е дефинирана и непрекъсната за $t \in [t_0, T)$, като $\lim_{t \to T} \alpha_T(t) = \infty$.

Да въведем означенията

(3) $$z = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \quad z_0 = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}, \qquad F_T(z,t) = \begin{pmatrix} g_T(x,y,t) \\ h_T(x,y,t) \end{pmatrix}.$$

Нека с $|\bullet|$ е означена евклидовата векторна норма. Да положим

$$\Phi_T(t,\tau) = \exp\left(\int_\tau^t \alpha_T(\tau) d\tau \right)$$

и да предположим, че съществува границата

$$\Phi_T(T,\tau) = \lim_{t \to T} \Phi_T(t,\tau)$$

и при някаква константа M е изпълнено $\sup_{t_0 \le \tau \le t \le T < T_0} |\Phi_T(t,\tau)| \le M$. Ако положим

$$z_T^*(t) = \begin{pmatrix} \Phi_T(t,t_0)x_0 \\ y_0 + B(\Phi_T(t,t_0) - 1)x_0 \end{pmatrix},$$

то да въведем означението

$$\frac{\delta}{2} = \sup_{t_0 \le t \le T < T_0} \left| z_T^*(t) - z_0 \right|.$$

С U да означим множеството от (n+1)-мерните вектори z, за които $|z - z_0| < \delta$. Нека за $z \in U$ и $t \in [t_0, T]$ функцията $F_T(z,t)$ е дефинирана и непрекъсната и при някаква константа L е изпълнено

(4) $$|F_T(z,t)| \le L$$

Нека, освен това, при някаква константа K за всяко $T \in (t_0, T_0)$ и $t \in [t_0, T]$, ако $z \in U$ и $\tilde{z} \in U$, то

(5) $$|F_T(z,t) - F_T(\tilde{z},t)| \le K|z - \tilde{z}|.$$

Да предположим, че съществува границата

$$\Phi^+ = \lim_{T \to t_0} \Phi_T(T, t_0)$$

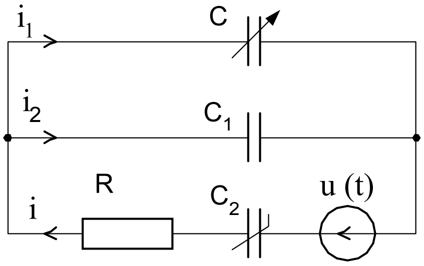
и да положим

$$z^+ = \begin{pmatrix} \Phi^+ x_0 \\ y_0 + B(\Phi^+ - 1)x_0 \end{pmatrix}.$$

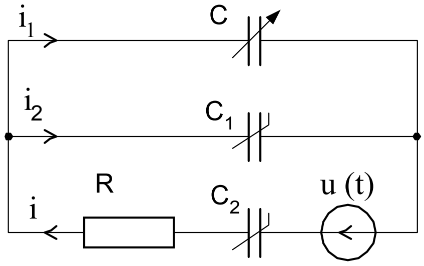
Теорема 1. *При направените предположения и $T \to t_0$, началната задача (1), (2) притежава единствено решение за $t \in [t_0, T]$ и $\lim_{T \to t_0} z_T(T) = z^+$.*

Да разгледаме процеса на мигновена комутация във веригата от фиг.1а, при който в момента t_0 се реализира мигновено изменение на капацитета на кондензатора C от $C_н$ на $C_к$. Паралелно на него е свързан кондензатор с капацитет C_1, а C_2 е нелинеен кондензатор, чиято кулон-волтна характеристика при заряд q е от вида $u_2(q) = aq + bq^3$ (напр. съгласно [5]), където a и b са константи. Във веригата са свързани още резистор със съпротивление R и източник на напрежение u(t). Токовете през трите клона са означени съответно с i, i_1 и i_2.

Мигновеният процес се апроксимира при $T \to t_0$ с редица от процеси в интервали $[t_0, T]$, в които капацитетът на кондензатора C е непрекъсната и



а



б

Фиг.1

диференцуема функция $C_T(t)$, за която $C_T\ (t_0) = C_н$ и $C_T\ (T) = C_к$. При това се предполага, че при някаква константа M за $t_0 \le \tau \le t \le T$ е изпълнено

$$\frac{C_T(\tau)+C_1}{C_T(t)+C_1} \le M \quad .$$

Ако $u_C(t)$ е напрежението на кондензатора C, то за $t \in [t_0, T]$ процесът във веригата от фиг.1 се описва със система от вида (1)

$$\frac{du_C}{dt} = -u_C\left(\ln(C_T(t)+C_1)\right)' + \frac{i}{C_T(t)+C_1}$$

$$\frac{di}{dt} = -\frac{u_C}{R}\left(\ln(C_T(t)+C_1)\right)' - \frac{i}{R}\left(a+3bq^2+\frac{1}{C_T(t)+C_1}\right)+\frac{u'(t)}{R}$$

$$\frac{dq}{dt} = i$$

при начални условия

$u_C(t_0) = u_0$, $i(t_0) = i_0$, $q(t_0) = q_0$.

В тази система $\alpha_T(t) = \left(\ln(C_T(t)+C_1)\right)'$. Тогава за началните условия за процеса след мигновената комутация съгласно теорема 1 намираме

$$u_C^+ = \frac{C_н + C_1}{C_к + C_1}u_0 \quad , \; i^+ = i_0 - \frac{1}{R}\left(\frac{C_н + C_1}{C_к + C_1} - 1\right)u_0, \quad q^+ = q_0 .$$

Първото от тези равенства представлява аналог на закона за съхранение на зарядите при мигновена комутация в линейни електрически вериги.

Ако $u_{CT}(t)$, $i_T(t)$ за $t \in [t_0, T]$ са от решението на разглежданата задача, то числото

$$\lim_{T\to t_0}\int_{t_0}^{T} u_{CT}(t)\frac{d\left(C_T(t)u_{CT}(t)\right)}{dt}dt = \frac{C_1}{2}\left(1-\left(\frac{C_н + C_1}{C_к + C_1}\right)^2\right)u_0{}^2$$

определя изменението на енергията в кондензатора C при мигновеното изменение на неговия капацитет от $C_н$ на $C_к$ в момента t_0.

Нека, по-нататък, при $T \in (t_0, T_0)$ и $t \in [t_0, T)$ да разгледаме системата

(6) $\frac{dx}{dt} = xA_T(x,y,t)\alpha_T'(t) + g_T(x,y,t)$

$\frac{dy}{dt} = f_T(x,y,t)\alpha_T'(t) + h_T(x,y,t)$

при начални условия (2). В системата (6) x отново е скаларна променлива, а y е n-мерна променлива. Функциите $A_T(x, y, t)$ и $g_T(x, y, t)$ са скаларни, а $f_T(x, y, t)$ и $h_T(x, y, t)$ са n-мерни векторни функции. Скаларната функция $\alpha_T(t)$ е дефинирана и непрекъсната в интервала $[t_0, T]$ и притежава производна $\alpha_T'(t)$ за $t \in [t_0, T_0)$. Освен това е изпълнено $\lim_{t \to T} \alpha_T'(t) = \infty$. С $\operatorname{var} \alpha_T(t)\Big|_{t_0}^{T}$ да означим вариацията на функцията $\alpha_T(t)$ в интервала $[t_0, T]$.

Да въведем означенията (3). Фиксираме положителното число δ и с U означаваме множеството от $(n+1)$-мерни вектори $z = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, за които $|z - z_0| < \delta$. За две непрекъснати в интервала $[t_0, T]$ векторни функции $p(t)$ и $q(t)$ да въведем означението

$\rho_T(p,q) = \max_{t_0 \le t \le T} |p(t) - q(t)|.$

С Ω_T при $T \in (t_0, T_0)$ да означим множеството от дефинираните в интервала $[t_0, T]$ $(n+1)$-мерни функции $z(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$, за които $z(t) \in U$ при всяко $t \in [t_0, T]$.

Да предположим, че за $z \in U$, $\tilde{z} \in U$ и $t \in [t_0, T]$ при $T \to t_0$ за някакви константи L_0, K_0, L и K са изпълнени неравенствата (4) , (5) и

$|f_T(x,y,t)| \le L_0$

$|f_T(x,y,t) - f_T(\tilde{x},\tilde{y},t)| \le K_0 |z - \tilde{z}|.$

Освен това, за функциите $z(t)$ и $\tilde{z}(t)$ от множеството Ω_T при $T \to t_0$ за някакви константи L_1 и K_1 са изпълнени неравенствата

$$\sup_{t_0 \le \tau \le t \le T} \left| \exp\left(\int_\tau^t A_T(x(s), y(s), s) d\alpha_T(s) \right) - 1 \right| \le L_1 \operatorname{var} \alpha_T(t)\Big|_{t_0}^{T}$$

$$\sup_{t_0 \le \tau \le t \le T} \left| \exp\left(\int_\tau^t A_T(x(s), y(s), s) d\alpha_T(s) \right) - \exp\left(\int_\tau^t A_T(\tilde{x}(s), \tilde{y}(s), s) d\alpha_T(s) \right) \right| \le$$

$$\le K_1 \operatorname{var} \alpha_T(t)\Big|_{t_0}^{T} \rho(z, \tilde{z})$$

С p_i да означим i-тата координата на вектора p.

Теорема 2. *При направените предположения съществуват такива числа* $\varepsilon_0 > 0$ *и* $M_0 > 0$, *че при* $T \to t_0$, *ако* $\operatorname{var} \alpha_T(t)\Big|_{t_0}^{T} < \varepsilon_0$, *то задачата (6), (2) притежава единствено решение* $z_T(t) = \begin{pmatrix} x_T(t) \\ y_T(t) \end{pmatrix}$ *и е в сила* $\sup_{t_0 \le t \le T} |z_T(t)| \le M_0$.

При $f_{Ti}(x,y,t)=0$ *е изпълнено* $\lim_{T\to t_0} y_{Ti}(T)=y_{0i}$, *а ако* $x_0 = 0$, *то* $\lim_{T\to t_0} x_T(T)=x_0$.

Да разгледаме процеса на мигновена комутация във веригата от фигура 1б, при който в момента t_0 се реализира мигновено изменение на капацитета на кондензатора C от $C_н$ на $C_к$. В нея, всички означения и предположения, свързани с веригата от фигура 1а са запазени с изключение на кондензатора C_1. Да предположим, че той е нелинеен и неговото напрежение $u_1(q_1)$ се определя в зависимост от заряда q_1 по формулата $u_1(q_1)=a_1q_1+b_1q_1^{\,3}$.

Мигновеният процес, както при първия пример, се апроксимира при $T\to t_0$, с редица от процеси в интервала $[t_0, T]$, които се описват със системата от вида (6)

$$\frac{dq_1}{dt}=-q_1\frac{a_1+b_1q_1^2}{\left(a_1+3b_1q_1^2\right)+\dfrac{1}{C_T(t)}}\frac{d\ln(C_T(t))}{dt}+\frac{i}{C_T(t)\left(a_1+3b_1q_1^2\right)+1}$$

$$\frac{di}{dt}=\frac{1}{R}q_1\frac{\left(a_1+b_1q_1^{\,2}\right)\left(a_1+3b_1q_1^{\,2}\right)}{\left(a_1+3b_1q_1^{\,2}\right)+\dfrac{1}{C_T(t)}}\frac{d(\ln(C_T(t))}{dt}-$$

$$-\frac{i}{R}\left(a+3bq^2+\frac{a_1+3b_1q_1^{\,2}}{C_T(t)(a_1+3b_1q_1^{\,2})+1}\right)+\frac{du(t)}{dt}\frac{1}{R}$$

$$\frac{dq}{dt}=i$$

при начални условия

$q_1(t_0)=q_{10}$, $i(t_0)=i_0$, $q(t_0)=q_0$.

В тази система имаме $\alpha_T(t)=\ln C_T(t)$. Съгласно Теорема 2, ако $\mathrm{var}(\ln C_T(t))\big|_{t_0}^{T}$ е сравнително малка и R е достатъчно голямо, то при $T\to t_0$ системата ще притежава единствено решение $q_{1T}(t)$, $i_T(t)$, $q_T(t)$, като $\lim_{T\to t_0} q_T(T)=q_0$.

Токът i през кондензатора C_2 и напрежението на кондензатора C_1 в края на мигновения процес остават съгласно теоремата ограничени, без да се определят еднозначно техните стойности.

ЛИТЕРАТУРА:

[1] ПОПОВ, В. П. Основы теории цепей. М., Высшая школа, 1985.

[2] ГИЧЕВ, Т. Р., АНГЕЛОВА. Один класс линейных диференциальных уравнений с неограничеными коефициентами. 2. Некоторые приложения. Сердика. Българско математическо списание. 18 (1992), 90-98.

[3] АНГЕЛОВА, Р., Т. ГИЧЕВ. Мгновенная коммутация в линейных электрических цепях с постоянными параметрами, Электромеханика, 1-2, 1996.

[4] АНГЕЛОВА, Р., Т. ГИЧЕВ. Едновременна и последователна мигновена комутация. 1. Едновременна мигновена комутация. 2. Мигновена комутация във верига с един к-елемент. Сборник трудове на ВВТУ “ Т. Каблешков”, 1998.

[5] PHILIPPOW, E. Nichtlineare Elektrotechnik. Akademische Verlagsgesellschaft Geest&Portig K.G. Leipzig, 1971.

MATHEMATICAL MODELS OF INSTANTANEOUS SWITCHING PROCESSES IN NONLINEAR NETWORK

Rositsa Angelova Todor Gichev

Todor Kableshkov Higher School of Transport, Sofia 1574, BULGARIA

Keywords: *switching process, initial conditions, nonlinear network*

Summary: *This work studies mathematical models of instantaneous switching processes in two types of nonlinear networks. It provides corresponding theorems, with which the behavior of the parameters at the end of the instantaneous process is characterized. We provide examples of switching processes in networks of both types.*