

---

## **ДИНАМИЧНА УСТОЙЧИВОСТ НА ТРЪБОПРОВОД, ОЧЕРТАН ПО ОКРЪЖНОСТ ПРИ НАЛИЧИЕ НА ЛИНЕЙНА ЕЛАСТИЧНА ОПОРА В ЕДИН ОТ КРАИЩАТА МУ**

**Димитър Лолов**  
[dlolov@yahoo.com](mailto:dlolov@yahoo.com)

*Университет по Архитектура, Строителство и Геодезия  
1046 София, бул. "Христо Смирненски" 1  
БЪЛГАРИЯ*

***Ключови думи:** динамична устойчивост, критична скорост, крива тръба, флуид, линейно-еластична опора*

***Резюме:** Разгледана е задачата за устойчивостта в равнината на крива тръба, очертана по част от окръжност при наличие на линейна еластична опора в единия ѝ край. Приета е предпоставката за неразтежимост на тръбата по оста ѝ. Провежданият флуид е с постоянна скорост и е несвиваем и тежък. За решението на проблема е използван матричният метод. Изследвано е влиянието на коравината на еластичната опора върху критичната скорост на транспортирания флуид.*

### **ВЪВЕДЕНИЕ**

Известно е, че загуба на устойчивост на даден тръбопровод настъпва с достигането на критичната скорост на транспортирания от него флуид. Редица параметри на системата влияят върху критичната скорост. В случаите, когато в модела на изследвания тръбопровод има приложени еластични опори, тяхното влияние върху устойчивостта на системата се изразява в следните два начина – чрез местоположението им по оста на съоръжението и чрез коравината на еластичната опората.

Проблемът с устойчивостта на тръбопроводи се разглежда в две направления – устойчивост на прави и устойчивост на криви тръби.

Изследване върху устойчивостта на прави тръби върху линейно-еластични опори е извършено през 1985 г. от Sugiyama и колектив [1], които доказват, че прилагането на допълнителна еластична опора към запъната тръба провеждаща флуид, може да я дестабилизира и да предизвика дивергентна загуба на устойчивост.

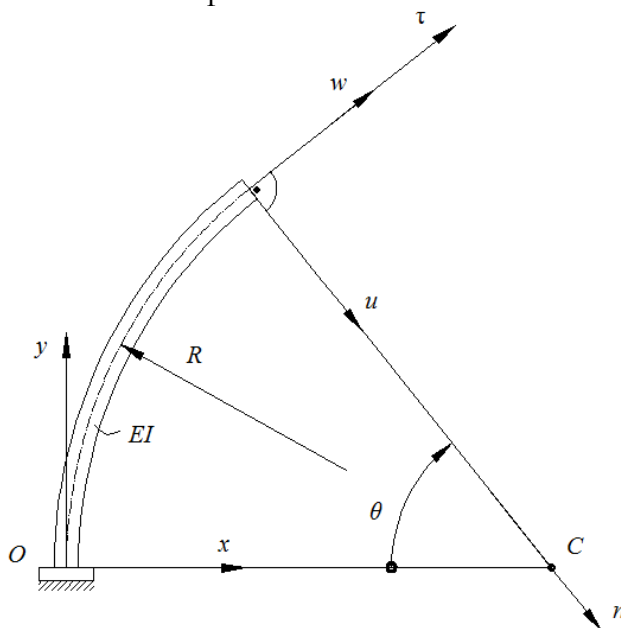
В сферата на кривите тръби Y.Nuang и колектив [2] изследват, чрез предложения от тях матричен метод, устойчивостта на крива тръба, очертана по окръжност и подпряна с линейноеластични опори. Матричният метод е по-подходящ от аналитичния метод и метода на крайните елементи (МКЕ) при изследването на тръби с междинни еластични опори.

Настоящата работа представлява продължение на изследванията на автора върху устойчивостта на равнинни криви тръби [3], като тук е извършено числено изследване

върху устойчивостта на крива тръба, очертана по част от окръжност при наличие на линейно еластична опора в единия ѝ край.

### ОПИСАНИЕ НА МЕТОДИКАТА

Разглежда се тръба, очертана по част от окръжност с радиус  $R$ . Кривината на огъване на тръбата е  $EI$ . Масата на тръбата на единица дължина е  $m_p$ , а масата на флуида на единица дължина от тръбата е  $m_f$ . Материалът на тръбата е хомогенен, изотропен и линейно еластичен. Транспортираният флуид е несвиваем и тежък. Разглежданата тръба е показана на фиг.1.



Фиг. 1. Геометрия на крива тръба, очертана по част от окръжност.

Приети са следните означения - с  $w(\theta, t)$  и  $u(\theta, t)$  се означат компонентите на преместването на напречно сечение по осите на естествената координатна система  $\tau$  и  $n$  съответно в тангенциална и радиална посока, а  $\theta$  е централният ъгъл, дефиниращ произволно напречно сечение от тръбата.

В настоящото изследване се приема предпоставката за неразтежимост на тръбата по оста  $\tau$ , т.е. относителната линейна деформация [3]:

$$(1) \quad \varepsilon = \frac{1}{R} \left( \frac{\partial w}{\partial \theta} - u \right) = 0.$$

От тук следва, че е в сила следната зависимост между преместванията  $w$  и  $u$ :

$$(2) \quad u = \frac{\partial w}{\partial \theta}.$$

Диференциалното уравнение за функцията на безразмерното тангенциално преместване  $\xi(\theta, \tau)$  за разглежданата тръба, има вида [2]:

$$(3) \quad \frac{\partial^6 \xi}{\partial \theta^6} + (2 + \nu^2) \frac{\partial^4 \xi}{\partial \theta^4} + 2\sqrt{\beta\nu} \frac{\partial}{\partial \tau} \left( \frac{\partial^3 \xi}{\partial \theta^3} \right) + \left( 1 + 2\nu^2 + \frac{\partial^2}{\partial \tau^2} \right) \frac{\partial^2 \xi}{\partial \theta^2} + 2\sqrt{\beta\nu} \frac{\partial}{\partial \tau} \left( \frac{\partial \xi}{\partial \theta} \right) +$$

$$+\left(v^2 - \frac{\partial^2}{\partial \tau^2}\right)\xi = 0,$$

където

$$(4) \quad \xi = \frac{w}{R}, \beta = \frac{m_f}{m_p + m_f}, v = RV\sqrt{\frac{m_f}{EI}}, \tau = \frac{t}{R^2} \sqrt{\frac{EI}{m_f + m_p}},$$

представяват съответно безразмерно тангенциално преместване на сечение от тръбата, масово отношение, безразмерна скорост на флуида и безразмерен параметър за времето. В равенства (4) с  $V$  е означена скоростта на флуида, а  $t$  е времето.

Решението на уравнение (3) се търси във вида:

$$(5) \quad \xi(\theta, \tau) = W(\theta)e^{i\Omega\tau},$$

където,  $\Omega$  е бездимензионна кръгова честота, която се пресмята по формулата:

$$(6) \quad \Omega = R^2\omega\sqrt{\frac{m_p + m_f}{EI}},$$

а  $W(\theta)$  е амплитудна стойност на  $\xi(\theta, \tau)$ .

В равенство (6) с  $\omega$  е означена собствената кръговата честота на тръбата.

След заместване на (5) в (3) се получава следното диференциално уравнение за функцията  $W(\theta)$ :

$$(7) \quad \frac{d^6 W}{d\theta^6} + (2 + v^2)\frac{d^4 W}{d\theta^4} + 2i\Omega\sqrt{\beta}v\frac{d^3 W}{d\theta^3} + (1 + 2v^2 - \Omega^2)\frac{d^2 W}{d\theta^2} + 2i\Omega\sqrt{\beta}v\frac{dW}{d\theta} + (v^2 + \Omega^2)W = 0$$

Съгласно метода на началните параметри, решението на (7) се записва във вида [2]:

$$(8) \quad W(\theta) = \sum_{i=1}^6 W_0^{(i-1)} f_i(\theta),$$

където  $W_0^{(i-1)}$ ,  $i=1, \dots, 6$  са шест начални параметъра, които представляват стойностите на  $W(\theta)$  и производните ѝ от ред 1 до 5, за  $\theta=0$ , а  $f_i(\theta)$  са функции които са решение на уравнение (7) и изпълняват следното условие:

$$(9) \quad \begin{bmatrix} f_1(0) & f_1^{(1)}(0) & f_1^{(2)}(0) & f_1^{(3)}(0) & f_1^{(4)}(0) & f_1^{(5)}(0) \\ f_2(0) & f_2^{(1)}(0) & f_2^{(2)}(0) & f_2^{(3)}(0) & f_2^{(4)}(0) & f_2^{(5)}(0) \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ f_6(0) & f_6^{(1)}(0) & f_6^{(2)}(0) & f_6^{(3)}(0) & f_6^{(4)}(0) & f_6^{(5)}(0) \end{bmatrix} = [I]_{6 \times 6}.$$

В (9) с  $[I]$  е означена единичната матрица. Функциите  $f_i(\theta)$  се търсят в следния вид:

$$(10) \quad f_i(\theta) = \sum_{n=1}^6 C_{in} e^{i\lambda_n\theta}, (i=1, \dots, 6),$$

където  $\lambda_n$  са корени на характеристичното уравнение на (7):

$$(11) \quad \lambda^6 - (2 + v^2)\lambda^4 - 2\Omega\sqrt{\beta v}\lambda^3 + (1 + 2v^2 - \Omega^2)\lambda^2 + 2\Omega\sqrt{\beta v}\lambda - (v^2 + \Omega^2) = 0.$$

Полага се уравнение (10) в (9) и се получава:

$$(12) \quad [C][D] = [I], \quad [C] = [D]^{-1}.$$

Елементите на  $[C]$  са коефициентите от уравнение (10), а  $D_{ij} = (i\lambda_i)^{j-1}$ . От тук следва, че елементите на матрицата  $[C]$  са определени след като бъдат пресметнати корените на характеристичното уравнение (11). От където следва, че са определени и функциите  $f_i(\theta)$ .

На базата на уравнение (8) се получава следната зависимост:

$$(13) \quad \begin{Bmatrix} W(\theta) \\ W^{(1)}(\theta) \\ \dots \\ W^{(5)}(\theta) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1(\theta) & f_2(\theta) & f_3(\theta) & f_4(\theta) & f_5(\theta) & f_6(\theta) \\ f_1^{(1)}(\theta) & f_2^{(1)}(\theta) & f_3^{(1)}(\theta) & f_4^{(1)}(\theta) & f_5^{(1)}(\theta) & f_6^{(1)}(\theta) \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ f_1^{(5)}(\theta) & f_2^{(5)}(\theta) & f_3^{(5)}(\theta) & f_4^{(5)}(\theta) & f_5^{(5)}(\theta) & f_6^{(5)}(\theta) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} W(0) \\ W^{(1)}(0) \\ \dots \\ W^{(5)}(0) \end{Bmatrix},$$

която съкратено може да бъде записана по следния начин:

$$(14) \quad \{\delta\} = [T]\{\delta_0\}$$

В [2] е изведена връзката между вектора  $\{q\} = \{w \ u \ \varphi \ M \ Q \ N\}^T$  и  $\{\delta\}$ :

$$(15) \quad \{q\} = [H]\{\delta\} + \{\Delta\},$$

където ненулевите елементи на матрицата  $[H]$  са:

$$(16) \quad H_{11} = H_{22} = R, \quad H_{33} = 1, \quad H_{42} = H_{44} = \frac{EI}{R}, \quad H_{53} = H_{55} = \frac{EI}{R^2},$$

$$H_{61} = H_{63} = \frac{2i\Omega\sqrt{\beta v}EI}{R^3}, \quad H_{62} = -\frac{\Omega^2 EI}{R^3}, \quad H_{64} = H_{66} = \frac{EI}{R^3}.$$

От елементите на вектора  $\{\Delta\}$  само един е различен от нула, а именно:

$$(17) \quad \Delta_6 = \frac{v^2 EI}{R^3}.$$

От уравнения (14) и (15) се получава следната връзка между стойностите на вектора  $\{q\}$  в двата края на тръбата:

$$(18) \quad \{q\}_1 = [U]\{q\}_0 + \{\tilde{\Delta}\},$$

където в уравнение (18):

$$(19) \quad [U] = [H][T][H]^{-1}; \quad \{\tilde{\Delta}\} = ([I] - [U])\{\Delta\}.$$

За случая на тръба запъната в левия си край и подпряна върху линейно-еластична опора в десния (фиг.2), е в сила следната връзка между стойностите на вектора  $\{q\}$  в двата края на тръбата:

$$(20) \quad \{w_1 \ u_1 \ \varphi_1 \ 0 \ k u_1 \ 0\}^T = [U]\{0 \ 0 \ 0 \ M_0 \ Q_0 \ N_0\}^T + \{\tilde{\Delta}\}.$$

В (20) с  $k$  е означена коравината на пружинната опора. От (20) следва следната зависимост:

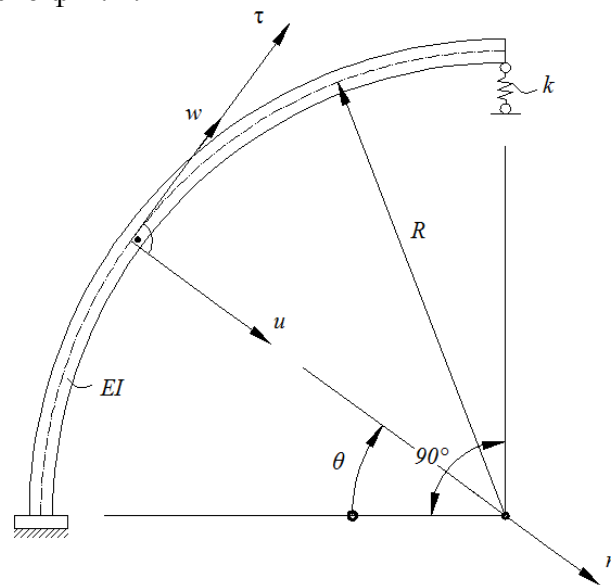
$$(21) \quad \begin{Bmatrix} -\tilde{\Delta}_4 \\ -(k\tilde{\Delta}_2 - \tilde{\Delta}_5) \\ -\tilde{\Delta}_6 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} u_{44} & u_{45} & u_{46} \\ (k u_{24} - u_{54}) & (k u_{25} - u_{55}) & (k u_{26} - u_{56}) \\ u_{64} & u_{65} & u_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} M_0 \\ Q_0 \\ N_0 \end{Bmatrix}.$$

В случая на загуба на устойчивост е необходимо уравнение (21) да няма единствено решение, което от математическа гледна точка съответства на изискването детерминантата от коефициентите  $u_{ij}$  да бъде равна на нула.

В настоящата работа с цел определяне на критичната скорост на транспортирания флуид се процедира по следния начин – варира се безразмерната скорост на флуида  $v$ , като за всяка стойност на  $v$  от уравнение (21) се определя  $\Omega$ . Системата е устойчива ако имагинерната част на  $\Omega$  е положителна. Най-малката скорост при която имагинерната част на  $\Omega$  стане нула, съответства на безразмерната критична скорост  $v_{cr}$ .

### ПРИЛОЖЕНИЕ НА МЕТОДА ЗА КОНКРТЕН ПРИМЕР

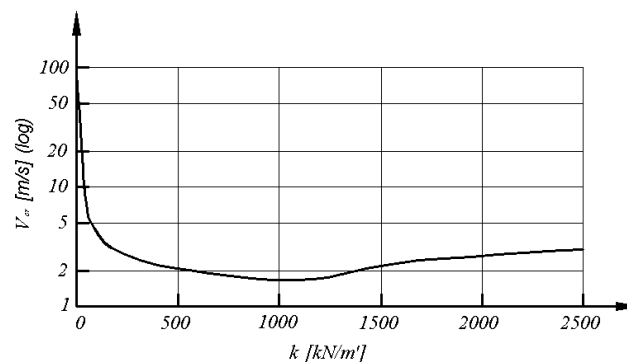
В настоящата работа е изследвана устойчивостта тръба, с геометрия и статическа схема, съгласно фиг. 2:



Фиг. 2. Геометрия и статическа схема на изследваната тръба.

Характеристиките на системата са:  $EI = 3001 \text{ kN m}^2$ ,  $m_p = m_f = 24 \text{ kg / m}$ ,  $R = 30 \text{ m}$ .

Изследването е извършено помоща програмния продукт MATLAB. Получена е зависимостта между коравината на линейно-еластичната пружина  $k$  и скоростта  $V_{cr}$  на флуида при загуба на устойчивост. Резултатите са представени на фиг.3. За по-ясно представяне на тези зависимост, по ординатната ос е използван логаритмичен мащаб.



Фиг. 3. Зависимост между  $V_{cr}$  и  $k$  за тръбата със статическата схема от фиг. 2.

## ИЗВОДИ

От получените резултати, представени на фиг. 2 е видно рязкото намаляване на критичната скорост на флуида в интервала  $0 \leq k \leq 20 \text{ kN/m}$ , и значително по-плавното ѝ намаляване за стойности на  $20 \leq k \leq 1100 \text{ kN/m}$ . Минималната стойност на скоростта се достига за  $k = 1100 \text{ kN/m}$  и е  $V_{cr} = 1,54 \text{ m/s}$ . За  $k > 1100 \text{ kN/m}$ , критичната скорост на системата започва бавно да расте за да достигане при  $k = \infty$  стойност  $V_{cr} = 3,18 \text{ m/s}$ , което съответства на случая на подвижна опора.

## ЛИТЕРАТУРА

[1]. Sugiyama Y., Y. Tanaka, T. Kishi, H. Kawagoe Effect of a spring support on the stability of pipes conveying fluid. Journal of Sound and Vibration, Vol.100, Issue2, 1985, pp 257-270

[2]. Huang Y., G. Zeng, F. Wei A new matrix method for solving vibration and stability of curved pipes conveying fluid. Journal of Sound and Vibration, 251(2), 2002

[3]. Лолов Д. Определяне на критичната скорост на флуид провеждан от крива тръба с променлива по дължината си кривина - Юбилейна международна научно-техническа конференция, Хидротехнически факултет и 15 години Немскоезиково обучение, УАСГ 2014, Годишник УАСГ, Свитък I-B, Том.XLVII, София, стр.209-215

## DYNAMIC STABILITY OF A CIRCULAR PIPE, SUPPORTED ON AN LINEAR-ELASTIC SUPPORT AT ITS END

Dimitar Lolov  
[dlolov@yahoo.com](mailto:dlolov@yahoo.com)

*University of Architecture, Civil Engineering and Geodesy*  
*1046 Sofia, 1 "Hristo Smirnenski" blvd.q*  
*BULGARIA*

**Key words:** *dynamic stability, critical velocity, circular pipe, fluid, linear-elastic support*

**Abstract:** *In this paper is investigated the in-plane stability of a circular pipe. Linear-elastic spring support is attached at one of its ends. The pipe is assumed inextensible. The flowing fluid in the pipe is heavy, incompressible and has a constant velocity. The matrix method is employed in solving the problem. The influence of the stiffness of the spring support on the critical fluid velocity is investigated.*