Механика Транспорт Комуникации **ISSN 1312-3823** (print)
ISSN 2367-6620 (online)
том 14, брой 1, 2016 г.
Научно списание **http://www.mtc-aj.com** **статия № 1272**

ФОРМАЛНИ МОДЕЛИ И АЛГОРИТМИ ЗА ИЗСЛЕДВАНЕ НА ЕФЕКТА ОТ СТРУКТУРНИЯ ИЗЛИШЪК В МАЖОРИТАРНИ СИСТЕМИ

Мария Христова
mhristova@vtu.bg

Висше транспортно училище „Тодор Каблешков"
София 1574, ул. „Гео Милев" № 158
БЪЛГАРИЯ

Ключови думи: *мажоритарна система, отказоустойчиви системи, структурен излишък, надеждност, готовност, средно време между откази*

Резюме: *Един от двата принципа, на които се изграждат критичните по безопасност системи (Safety Critical Systems) е отказоустойчивостта (Fault-tolerance). В статията са моделирани и изследвани к∨n системи, в частност мажоритарните 2∨3 (Triple modular redundancy) и 3∨5, които са типичен представител на Fault-tolerance принципа. Целта на изследването е да се изведат математически модели, чрез които да се оцени количествено влиянието на съдържащия се в структурата излишък върху средното време между отказите на системата, както и да се предложи алгоритъм и се извършат изчисления за установяване на ефективността на излишъка.*

Въведена е сравнителна величина ξ, която оценява как се изменя времевият показател в зависимост от прага на мажоритарност и надеждността на елементите, от които тя е изградена. Изведени са нови формули и са установени зависимости между търсените средни времена и влияещите им величини-параметрите на структурния излишък ***k*** *и* ***n*** *и коефициента на готовност на градивните единици* $K_г$*. Намерено е, че при готовност на структурния елемент, изграждащ системата, по-малка от някакъв праг, ефектът от излишъка се губи. Направен е изводът, че разходите за структурен излишък са изгодни, но само при достатъчно висока първоначална надеждност на градивните единици, от които са съставени системите.*

1. Постановка на проблема

Предмет на моделиране и изследване в тази статия е клас системи, известни като ***мажоритарни отказоустойчиви системи*** (*структури*) [1]. Мажоритарни са структури, състоящи се от n подсистеми (градивни единици, канали) с еднакво предназначение, всяка от които има зададената на системата функционалност и работоспособността й зависи от т. нар. ***кворум-функция***. Числото на кворума (критерият за вярност) $k < n$ показва броя на работоспособните подсистеми. Мажоритарната система е работоспособна, когато

(1) $$k = \left]\frac{n}{2}\right[+ 1,$$

а

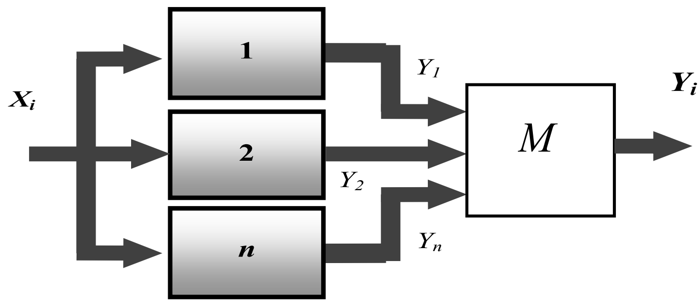
(2) $$r = n - k$$

е структурен излишък.Уравнения (1) и (2) са валидни за просто мажоритиране.

С мажоритарни структури на базата на изходната градивна единица (микрокомпютър, контролер, софтуерна програма) се постига висока надеждност, но с няколкократно по-висок хардуерен и/ или софтуерен ресурс [2]. Доколко този ресурс е ефективен зависи от подобрението на надеждността и режима на работа на системата. Тук ефектът е обозначен с ξ и е въведен като величина, която показва колко „по-дълъг живот" ще има системата в сравнение със средното време между отказите на градивната единица, която може да извърши същата функция.

Входният вектор $X_i(x_1, x_2, \ldots x_v)$ (фиг.1) в даден момент се подава за обработка на всички $\boldsymbol{n}$ мажоритиращи канали (градивни единици), където $\boldsymbol{n}$ е мярка за излишъка. Изходните резултати във вид на двоични вектори се сравняват в мажоритиращото устройство $\boldsymbol{M}$ и ако $\boldsymbol{k}$ от тях ($k = \overline{1,n}$) извеждат еднакви вектори $\boldsymbol{Y_i}$, системата валидира за верен изходящия вектор $\boldsymbol{Y_i}$. Тя се приема за работоспособна и остава работоспособна, когато след отказ отпаднат един, два или повече канала до достигане на $n - k$ отказа. При повече откази се нарушава критерият за вярност и мажоритарната структура става неработоспособна.

При възстановими системи големият излишък (когато $\boldsymbol{n}$ >5) губи смисъл, защото времето за наработка до отказ $MTTF_{k \vee n}$ (месеци, години) е стотици и хиляди пъти по-голямо от времето на възстановяване на отказалата единица $T_в$ (час-два). За това късо време е малко вероятно да настъпят откази, та да се стигне до неработоспособност, която може да се предотврати с по-дълбокото резервиране. Ето защо практически не се прилагат структури с много голям излишък, който освен другото и повишава цената на надеждността. Най-често $\boldsymbol{n}$ се свежда до пределния минимум на мажоритарните системи, т.нар. *Triple modular redundancy* - система $2 \vee 3$, или при особено високи изисквания - система $3 \vee 5$. Поради това настоящият анализ е ограничен в рамките на $2 \vee 3$ и $3 \vee 5$ системи.



Фиг. 1 Мажоритарна структура

Целта на настоящото изследване е да се изведат математически модели, чрез които да се оцени количествено влиянието на съдържащия се в структурата излишък върху средното време между отказите на системата, както и да се установят зависимости между показателя за надеждност и големината на излишъка.

2. Обобщение на известното от литературните проучвания

По проблема за моделирането на надеждността на мажоритарните системи има публикации, които позволяват да се обхванат и опишат техните характеристики [1, 2, 3]. Тази статия се основава на известни научни резултати, но намира отговори на още неизследвани въпроси с практическа значимост.

В литературата е намерен математическият модел на надеждността $P_{k\vee n}(t)$ на изследваните системи в зависимост от вероятността за безотказна работа ***p***, респ. от верятността за отказ $q = 1 - p$, на структурните им единици (прието е да са равнонадеждни) [5]:

(1) $$P_{2v3}(t) = p^3 + 3p^2q,$$

(2) $$P_{3v5}(t) = p^5 + 5p^4q + 10p^3q^2,$$

където $p(t) = e^{-\lambda t}$ при интензивност на отказите $\lambda = const$ и ***t*** нароботка на отказ (време).

По тези формули са проведени изчисления за зависимостите $P_{k\vee n}(t)$. Установено е, че след определена точка $t_{кр}$ надеждността на системата става по-малка под тази на елементите, от които са изградени.

В зависимост от средното време на живот $MTBF$ на елементите са изведени формули за средното време за наработка на отказ $MTTF_s$ на невъзстановими системи и средното време между отказите $MTBF_s$ на възстановими системи. В контекста на настоящото изследване заслужават внимание резултатите за възстановимите системи. Установено е, че в общия случай средното време $MTBF_{k\vee n}$ между отказите на системата ***"k*** от ***n"*** е:

(3) $$MTBF_{k\vee n} = \frac{1}{H_s} = \frac{MTBF}{\binom{n}{k} kK_г^{k-1}(1-K_г)^{n-k}},$$

където $K_г$ е коефициентът на готовност.

За система $2 \vee 3$:

(4) $$MTBF_{2\vee 3} = \frac{1}{H_s} = \frac{MTBF}{6K_г(1-K_г)},$$

а за система $3 \vee 5$:

(5) $$MTBF_{3\vee 5} \frac{MTBF}{30K_г^2(1-K_г)^2}$$

3. Моделиране на ефекта от излишъка върху времето на живот на мажоритарните системи

3.1 Формален модел

Новите изследвания в тази статия по-нататък ползват вече установените научни резултати от предишни авторски публикации, както и на такива от други автори.

Както бе отбелязано, за да се установи ефектът от излишъка върху „времето на живот" на системата, се въвежда сравнителна величина ξ. Тя е число, което се дефинира като отношение на средното време между отказите на мажоритарната система $MTBF_{k\vee n}$ към средното време между отказите на елементите й $MTBF$:

(6) $\xi = \dfrac{MTBF_{k\vee n}}{MTBF}$.

В общия случай, като се замести от (3) в (7), за ефекта от излишъка върху времето на живот на мажоритарната система, т.е. за подобрението, което той внася, се намира:

(7) $$\xi_{k\vee n} = \frac{1}{\binom{n}{k} kK_г^{\,k-1}(1-K_г)^{n-k}}$$

Приложена за система $2\vee 3$, тази формула се редуцира на:

(8) $$\xi_{2\vee 3} = \frac{1}{6K_г\ (1-K_г)} .$$

За система $3\vee 5$:

(9) $$\xi_{3\vee 5} = \frac{1}{30K_г^{\,2}(1-K_г)^2} .$$

Нека се изследват функциите $\xi_{2\vee 3}(K_г)$ и $\xi_{3\vee 5}(K_г)$.

3.2 Изследване на система $2\vee 3$

3.2.1 Изследване на функцията $\xi_{2\vee 3}(K_г)$

Ако аналитичният израз за подобрението на времето на живот (8) се изследва по методите на математическия анализ, ще се установи, че $\xi_{2\vee 3}(K_г)$ намалява с коефициента $K_г$ на готовност на елементите, от които е създадена системата. Видно е, че функцията е екстремална: тя има минимум при някаква критична стойност на коефициента на готовност на структурния елемент $K_{г kr}$ и стойности $\xi_{2\vee 3}\to\infty$, когато $K_г\to 1$ и $K_г\to 0$. Освен това при други две характерни стойности на готовността ($K_{гr1}$ и $K_{гr2}$) подобрението се нулира ($\xi_{2\vee 3}=1$), което означава, че времето на живот на системата се изравнява с това на елемента.

3.2.2 Определяне на $K_{г кр}$

За да се намери критичната най-ниска стойност на готовността, уравнение (8) трябва да се изследва по минимаксния метод за определяне на екстремум. По-лесно, а равнозначно, е решението чрез анулиране на първата производна на функцията в знаменателя $6K_г\ (1-K_г)$:

$$\frac{d\big(6K_г\ (1-K_г)\big)}{dK_г}=0\ ,\ (1-K_г)+K_г=0 .$$

(10) $K_{гkr2\vee 3}=0{,}5$

3.2.3 Определяне на $K_{гr1}$ *и* $K_{гr2}$

Ефектът от излишъка $\xi_{2\vee 3}=1$ е нулев, когато в уравнение (8) се положи $6K_г\ (1-K_г)=1$. Това е условието, при което $MTBF_{2\vee 3}=MTBF$. Могат да се намерят стойностите на готовността, за които се изпълнява това условие. Изразът се редуцира до квадратното уравнение:

(11) $6K_г^2 - 6K_г + 1 = 0$,

корените на което са: $K_{г r1}$= 0,789 и $K_{г r2}$ = 0,211. При тези стойности се достига до средно време между отказите на системата, равно на това на елементите: $MTBF_{2\vee 3} = MTBF$.

При стойности на готовността, обичайни за компютърно-базираните структурни елементи K$_г$= 0,999 подобрението е $\xi_{2\vee 3} =$ 166, т.е. толкова пъти по-дълъг живот. Независимо от този много силен ефект на подобрение при висока надеждност, когато готовността намалява, рязко пада и подобрението. Най-ниско е то при критичната стойност $K_{г\,кр}$.

3.3 Изследване на система $3 \vee 5$

Изследването на $\xi_{3\vee 5}(K_г)$ е направено по същия ред.

3.3.1 Определяне на $K_{г\,кр}$

Търсят се екстремалните точки на знаменателя на (9) $30K_г^2(1-K_г)^2$.

$$\frac{d\left(30K_г^2(1-K_г)^2\right)}{dK_г} = 0 ,$$

$$30.2K_г(1-K_г)^2 - 30K_г^2 2.(1-K_г) = 0 ;$$

$$(1-K_г) - K_г = 0$$

(12) $K_{гkr3\vee 5}$= 0,5

Т.е., критичната точка е при същата стойност на готовността. Замествайки в (9) намираме, че минималната точка, до която ще стигне отношението е:

$$\xi_{3\vee 5} = 0{,}533$$

3.3.2 Определяне на критичните точки

Стига се до уравнението от 4-та степен:

$$30K_г^2(1 - 2K_г + K_г^2) - 1 = 0 ;$$

Заслужават интерес само корените на квадратното уравнение:

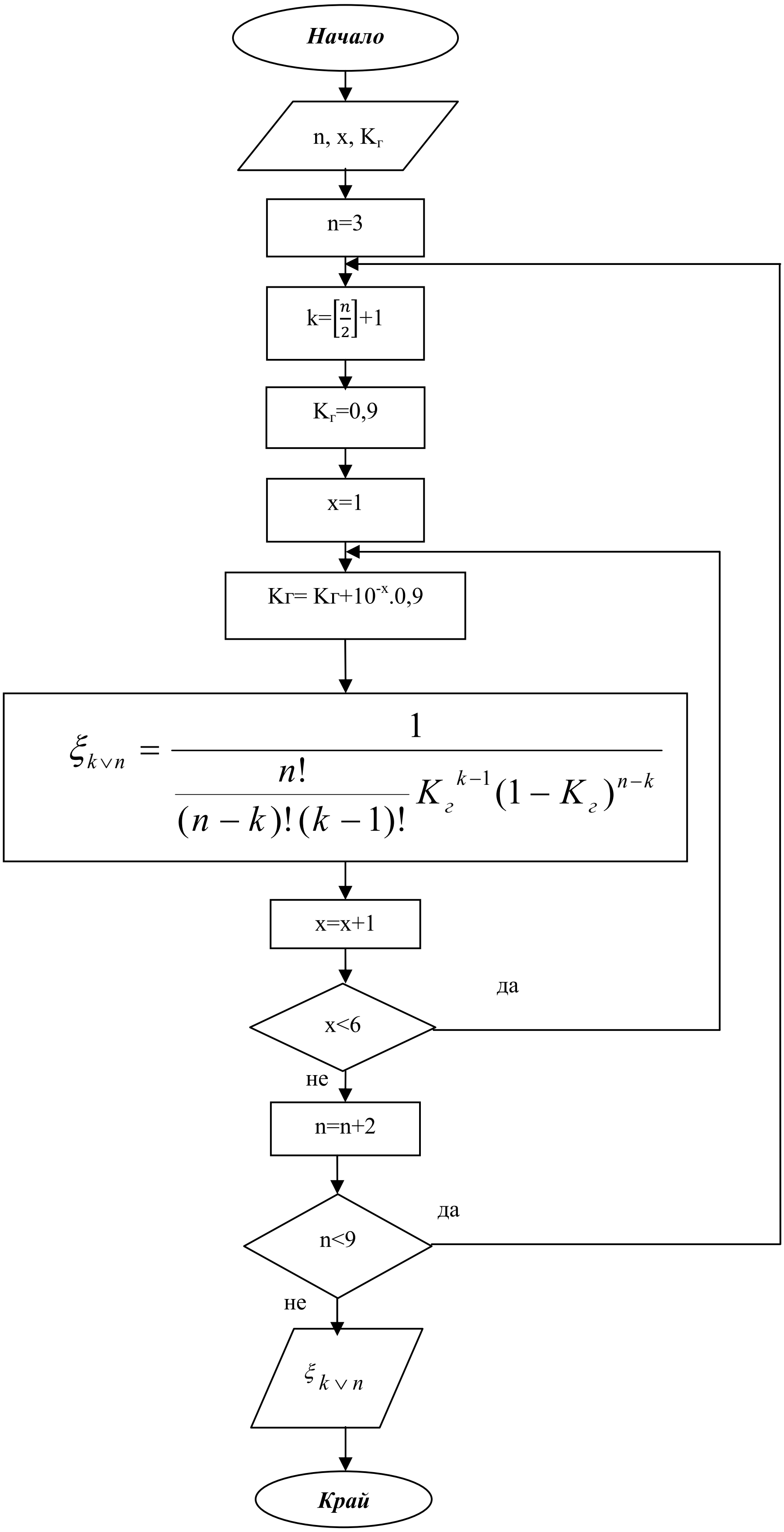
$$K_г^4 - 60K_г^3 + 30K_г^2 - 1 = 0$$

Те са: $K_{г r1}$= 0,2111 и $K_{г r2}$ = 0,7889. Другите два са имагинерни.

4. Алгоритъм за изчисление на относителното подобрение на средното време между отказите на мажоритарната система

Въз основа на изведените в т.3 модели за оценяване на ефекта от излишъка върху средното време между отказите на мажоритарните системи може да се състави и алгоритъм за изчисление на относителното подобрение $\xi_{k\vee n}$ на мажоритарни структури от типа $k \vee n$. На фиг.2. е предложена блок-схема на алгоритъма.

Входните данни съдържат стойности на коефициента на готовност $K_г$, представляващи практически интерес, напр. $K_г = 0{,}9 \div 0{,}9999$. Изчислителният процес е цикличен и алгоритъмът има два вложени цикъла. Вътрешният от тях е по $K_г$. При зададени начални стойности на *k* и *n* по (7) се изчисляват значенията на $\xi_{k\vee n}$ за всички стойности на $K_г = 0{,}9 \div 0{,}9999$.



Фиг.3 Алгоритъм за изчисления на относителното подобрение на времето MTBF

След това се преминава към външния цикъл, когато се сменя *k*. За да е мажоритарна, структурата трябва да има число на кворум функцията:

$$k = \left(ent.\frac{n}{2} \right) + 1 \leq k \leq n. \tag{13}$$

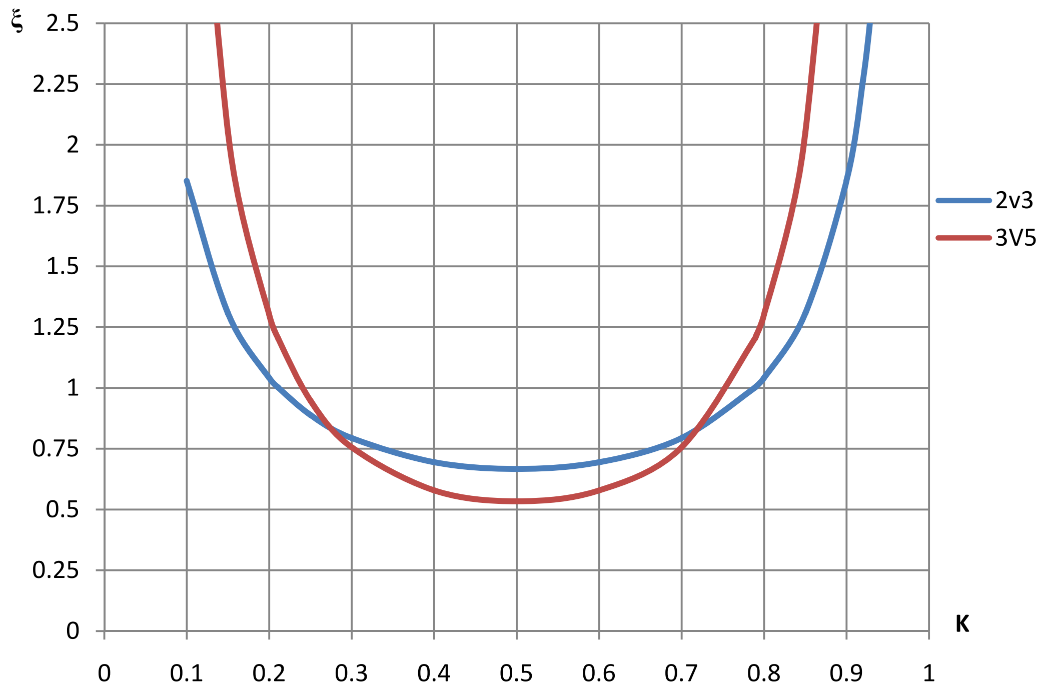
За n се задават стойности, представляващи интерес, най-вече в диапазона $n = 3 \div 9$ (с нарастване 2). Теоретически интерес може да представляват и по-големи стойности, но алгоритъмът не се променя.

5. Резултати от проведените изчисления и графични интерпретации

Функцията $\xi_{2\vee 3}(K_г)$ е графично интерпретирана на фиг. 3 и фиг. 4. За фиг. 3 изчисленията са направени като в алгоритъма стъпката на нарастване на $K_г$ е 0,1, а на фиг. 4 е $10^{-x}.0,9$.

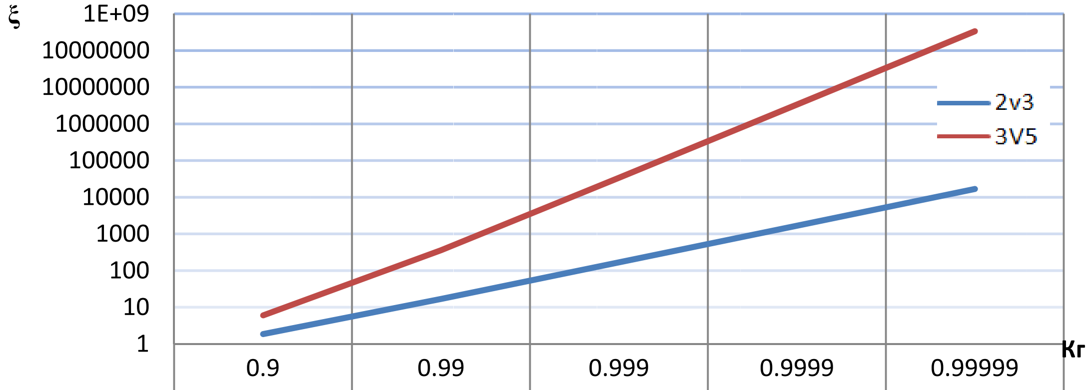
При голяма надеждност на структурната единица $p \approx 1$ тя има много висока стойност $\xi_{2\vee 3} \to \infty$. При $K_г = 0,5$ отношението достига до минималната си стойност $\xi_{2\vee 3} = 0,666$ и отново нараства симетрично спрямо тази минимална точка. Поради малките стойности на готовността $K_г < 0,5$, каквито не се срещат в практиката, кривата не представлява практически интерес при по-нататъшния си ход.

От направените изследвания се вижда, че и двете мажоритарни системи имат едни и същи качества и принципно не се различават. С увеличаване на излишъка от $2 \vee 3$ на $3 \vee 5$ се подсилват характерните особености: нараства ефектът на подобрение, но само при високите стойности на надеждността на градивния компонент, а при ниски стойности надеждността се влошава под тази на $2 \vee 3$.



Фиг. 3 Увеличаване на времето на живот на мажоритарната система в зависимост от готовността на структурно изграждащия елемент

Най-силен ефект от излишъка, стотици хиляди пъти „по-дълъг живот”, се получава при стойности, близки до 1, т.е. при много висока готовност на градивния елемент. Тъй като при линеен мащаб на фиг. 3 това не може да се отчете, тази част от кривите е показана на фиг.4 в десетичен логаритмичен мащаб, в който $\xi_{2\vee3}(K_г)$ става почти линейна зависимост с наклон, нарастващ пропорционално на прага на мажоритарност k.



	0.9	0.99	0.999	0.9999	0.99999
Серия2	4.115226337	340.1013502	33400.10013	3334000.1	333340000.1
Серия1	1.851851852	16.83501684	166.8335002	1666.83335	16666.83334

Фиг.4 $\xi_{2\vee3}(K_г)$ в логаритмичен мащаб

Изводи

1. Колкото готовността на елемента е по-малка, толкова по-слаб е ефектът от излишъка. При малки стойности на готовността на градивния елемент надеждността на системата намалява и става по ниска от нея. При $K_г = 0{,}5$ се стига до там, че системата $2 \vee 3$ става по-ефективна от система $3 \vee 5$.

2. При висок коефициент на готовност $K_г = 0{,}9999$ времето на живот на мажоритарната система в сравнение с този на градивните й компоненти се увеличава на няколко порядъка: за $\xi_{2\vee3} = 1666{,}8$, $\xi_{3\vee5} = 3334000$.

Заключение

В резултат от проведените изследвания на ефекта от структурния излишък в мажоритарни системи са установени нови зависимости, позволяващи да се изчисли повишението на времето между отказите на мажоритарната система в сравнение с времето между отказите на изграждащия я елемент със същите функции. Предложен е алгоритъм за провеждане на изчислителния процес. Получени са графични резултати, които позволяват да се направи заключението, че мажоритарните системи имат голям ефект в повишаването на надеждността и разходите за структурен излишък са изгодни само при достатъчно висока първоначална надеждност на градивните единици, от които са съставени.

Литература

[1] P. A. Lee, T. Anderson, Fault Tolerance: Principles and Practice, Springer Science & Business Media, pp. 51-62, 2012

[2] Redundant System Basic Concepts, 2008, National Instruments, http://www.ni.com/white-paper/6874/en/

[3] Черкасов Г.Н. Надежность аппаратно-программнных комплексов, Издательство Питер, ISBN 5-469-00102-4, 2005

[4] Hristov H., G.Popov, M. Hristova, Comparative Reliability Analysis for Fault-Tolerant Microprocessor Structures, Proceedings of the Second International Scientific Conference "Computer Science", Greece, pp. 48-53, 2005

[5] Христов Хр., М. Христова, Моделиране на надеждността на отказоустойчиви системи с хомогенно резервиране, Научно списание "Механика, Транспорт и Комуникации", ISSN 1312-3823, том 11, бр. 3, статия № 0862, 2013

FORMAL MODELS AND ALGORITHMS FOR EXAMINING THE EFFECT OF STRUCTURAL REDUNDANCY OF MAJORITY SYSTEMS

Mariya Hristova
mhristova@vtu.bg

Todor Kableshkov University of Transport
1574 Sofia, Geo Milev str. 158
BULGARIA

Key words: *majoritary system, Fault-tolerant Systems, Safety Critical Systems (SCS), fail-safe systems, structural redundancy, reliability, availability, mean time between failures*

Abstract*: One of two principles which build critical safety systems (Safety Critical Systems) is fault tolerance (Fault-tolerance). In the article are modeled and tested* $k \vee n$ *systems, in particular the majority* $2 \vee 3$ *(Triple modular redundancy) and* $3 \vee 5$*, which are typical of the Fault-tolerance principle. The aim of the study is to derive mathematical models by which to quantify the impact of the structure contained in the surplus on the mean time between failures of the system and to propose an algorithm and perform calculations to verify the effectiveness of the redundancy.*

A comparative value ξ *is introduced, which assesses the change in the time indicator, depending on the verge of majority and reliability of the elements of which it is built. New formulas are derived and relationships are determined between the times sought and their influencing values - the parameters of the structural rdundancy k and n and the coefficient of availability of the building elements* $K_г$*. It is found that when the level of readiness of the structural element that builds the system is lower than an established threshold, the excess effect is lost. It is concluded that the costs of structural redundancy are beneficial, but only at sufficiently high initial reliability of the building units that make up the system.*