Механика
Транспорт
Комуникации

ISSN 1312-3823 (print)
ISSN 2367-6620 (online)
том 13, брой 3/3, 2015 г.

Научно списание http://www.mtc-aj.com статия № 1254

КРИТЕРИЙ ЗА НАЛИЧИЕ НА ХАОТИЧЕН ПРОЦЕС В 3-МЕРНА НЕЛИНЕЙНА ДИНАМИЧНА СИСТЕМА ЧРЕЗ ОЦЕНКА НА ЕНЕРГИЙНОТО СЪСТОЯНИЕ

Галина Чернева, Елена Димкина
cherneva@vtu.bg

ВТУ "Тодор Каблешков"
София, 1574, ул. "Гео Милев" 158,
БЪЛГАРИЯ

Ключови думи: *нелинейни динамични системи, хаотичен режим, дисипация, уравнение на Дюфинг*

Резюме: *Математичен модел на непрекъсната нелинейна динамична система (НДС) е система от нелинейни диференциални уравнения. Броят на уравненията, респ. броят на фазовите променливи в тях, определя размерността на НДС. Доказано е, че за да се наблюдава хаотичен режим, системата трябва да е най-малко тримерна.*

От теорията на диференциалните уравнения се знае, че система от три диференциални уравнения от първи ред с три променливи може да се представи във вид на нехомогенно диференциално уравнение на една променлива от втора степен. На база на това представяне са изведени обобщени изрази на дисипативния и свободния член в уравнението като мярка за енергийното състояние на системата. Те са използвани като критерии за възникване на хаотичен режим в системата.

Предложените критерии са приложени към нелинейна електрическа верига, описана с неавтономно уравнение на Дюфинг. Това уравнение е модел на много вериги, чийто нелинеен елемент се описва с нелинейна функция от трети ред.

1. Постановка на проблема

Тримерните нелинейни динамични системи (НДС) са най-елементарните динамични системи, за които е доказана възможността за генериране на хаотични сигнали [1,2,5]. Математичният им модел се представя със система от три нелинейни диференциални уравнения от първи ред с три променливи. От теорията на диференциалните уравнения е известно [4], че такава система може да се представи във вид на нехомогенно диференциално уравнение на една променлива от втора степен. Такова е и неавтономното уравнение на Дюфинг [1,2], което е типичен модел на редица нелинейни електрически вериги, чийто нелинеен елемент се описва с нелинейна функция от трети ред [3].

Съгласно теорията на нелинейната динамика [2], хомогенната форма на разглежданото диференциално уравнение съвпада с математичния модел на нелинеен осцилатор. На база на тази аналогия, в настоящата работа са получени изрази, свързани с оценка на енергията на НДС. Тези изрази са анализирани на примера на електрическа верига, описана с уравнение на Дюфинг. Установено е, че характерът на времевите им зависимости може да се използва като критерий за възникване на хаотичен режим във веригата.

2. Общ вид на енергийните коефициенти за НДС от трети ред

Математичният модел на тримерна НДС е система от вида:

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}), \tag{1}$$

където

$\boldsymbol{x}=(x_1,x_2,x_3)^{\mathrm{T}} \in \mathbf{R}^3$

са фазовите променливи, а

$\boldsymbol{f}=(f_1,f_2,f_3)^{\mathrm{T}}$ е аналитична нелинейна функция, определена в E , $E \supseteq \mathbf{R}^3$.

Система (1) може да се представи във вид на нехомогенно диференциално уравнение на една променлива от втора степен, чийто вид е:

$$\ddot{x}_i + \alpha_i \dot{x}_i + \beta_i x_i = f(x_i, \dot{x}_i) \ , \ i = \overline{1,3}. \tag{2}$$

Хомогенният вид на (2) е уравнение на нелинеен осцилатор [1,2]. От теорията на нелинейната динамика [4] е известно, че α_i в (2) е коефициент на затихване, а коефициентът β_i е пропорционален на квадрата на собствените колебания на осцилатора.

Ако се прехвърли дясната част на (2) отляво на равенството, след преобразувания, може да се запише:

$$\ddot{x}_i + \left(\alpha_i - \frac{f(x_i,\dot{x}_i)}{\dot{x}_i}\right)\dot{x}_i + \beta_i x_i = 0 \ , \quad i = \overline{1,3} \tag{3,а}$$

$$\ddot{x}_i + \alpha_i \dot{x}_i + \left(\beta_i - \frac{f(x_i,\dot{x}_i)}{x_i}\right)x_i = 0 \ , \ i = \overline{1,3} \tag{3,б}$$

Така в уравнение (3,а) се обособява израз

$$\alpha_i - \frac{f(x_i,\dot{x}_i)}{\dot{x}_i} \ , \tag{4}$$

който характеризира затихването. Той оценява дисипацията в системата.

Полученият в уравнение (3,б) коефициент

$$\beta_i - \frac{f(x_i,\dot{x}_i)}{x_i} \ , \tag{5}$$

характеризира потенциалната енергия.

Така изразените зависимости (3,а) и (3,б) оценяват на енергийното състояние на системата.

3. Изследване на енергийните коефициенти за електрческа верига, моделирана с уравнение на Дюфинг.

Неавтономното уравнение на Дюфинг има вида:

$$\ddot{x} + k\dot{x} + F(x) = A\cos\omega t\,. \tag{6}$$

Ако функцията $F(x)$ е от трети ред от вида

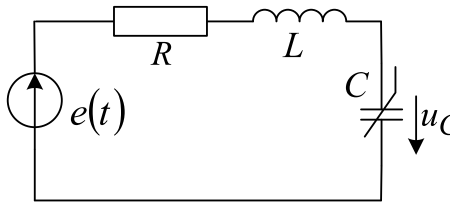
$$F(x) = ax + bx^3,\ a > 0, b > 0,$$

то (6) е еквивалентно на тримерна НДС, представена със системата:

(7) $$\begin{vmatrix} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = ax_1 - bx_1^3 + [-kx_2 + A\cos x_3]. \\ \dot{x}_3 = \omega \end{vmatrix}$$

В същото време уравнение (6) е модел на често приложимата електрическа верига от фиг.1, захранена с електродвижещо напрежение $e(t) = E\cos\omega t$, чийто нелинеен кондензатор е с кулон-волтна характеристика:

(8) $$u_C(q) = aq + bq^3 \quad a > 0, b > 0\ .$$



Фиг.1 Схема на електрическата верига

Действително, съгласно втори закон на Кирхоф, за веригата от фиг.1 се записва уравнението:

(9) $$L\frac{d^2q}{dt^2} + R\frac{dq}{dt} + aq + bq^3 = E\cos\omega t\ .$$

При полагане:

(10) $$a = b = 1,$$
$$A = \frac{E}{L},$$
$$q = x(t),$$

уравнение (9) може да се представи във вида:

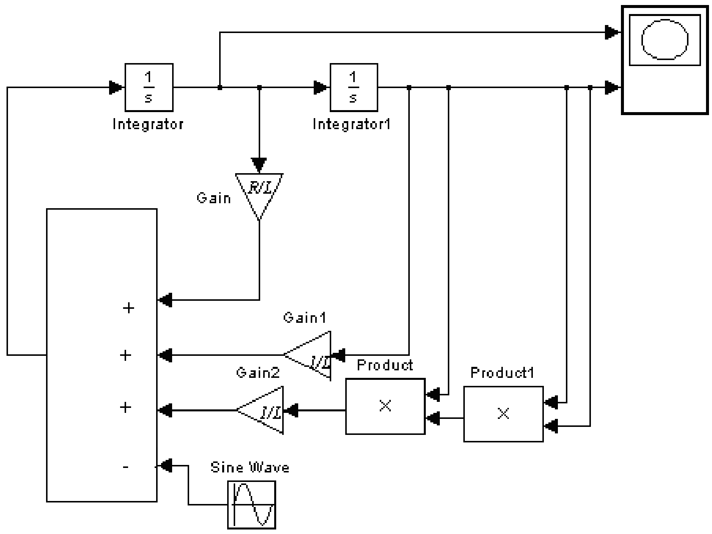
(11) $$\ddot{x} + \left(\frac{R}{L} + \frac{x^3}{L\dot{x}} - \frac{A\cos\omega t}{\dot{x}}\right)\dot{x} + \frac{x}{L} = 0.$$

В (11) е обособен обобщеният дисипативен коефициент:

(12) $$\alpha_d = \frac{R}{L} + \frac{x^3}{L\dot{x}} - \frac{A\cos\omega t}{\dot{x}}.$$

Уравнение (9), при изпълнени зависимости (10), може да се представи и във вида:

(13) $$\ddot{x} + \frac{R}{L}\dot{x} + \left(\frac{1}{L} + \frac{x^2}{L} - \frac{A\cos\omega t}{x}\right)x = 0,$$



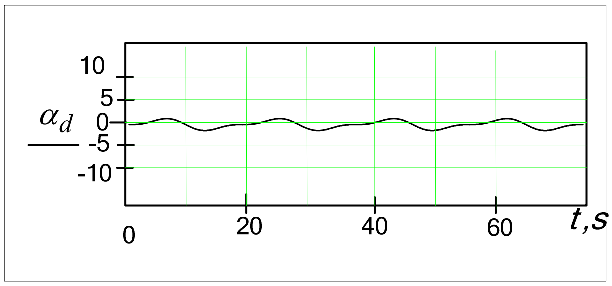
Фиг.2 Симулационен модел

където е обособен коефициентът

(14) $$\beta_d = \frac{1}{L} + \frac{x^2}{L} - \frac{A\cos\omega t}{x} \quad .$$

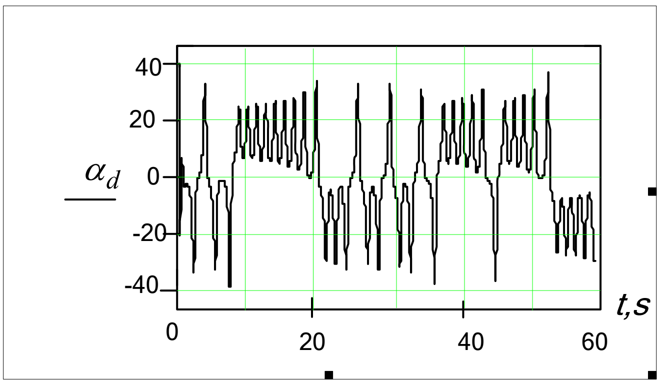
Изменението на коефициенти (12) и (14) при различни стойности на параметрите на веригата е изследвано чрез симулационния модел в Matlab/Simulink, показан на фиг.2.

Резултатите от симулацията показват, че при наличие на регулярен режим във веригата обобщеният дисипативен коефициент има квазипериодично изменение във времето (фиг.3).



Фиг.3 Изменение на дисипативния коефициент при регулярен режим

При хаотичен режим изменението на коефициента α_d е непериодично, както е показано на фиг.4.



Фиг.4 Изменение на дисипативния коефициент при хаотичен режим

При разглежданите режими характерът на коефициент β_d е аналогичен.

4. Заключение

В работата е представено неавтономното уравнението на Дюфинг, като еквивалент на математичния модел на тримерна НДС, във вид на уравнение на нелинеен осцилатор. В него са обособени коефициенти, характеризиращ енергийното състояние на системата. На база на конкретна електрическа верига, моделирана с това уравнение, е изследвано изменението на разглежданите коефициенти във времето, като е установен непериодичния им характер при наличие на хаотичен режим

Литература

[1] Matsumoto T., Chua L.O. Journal of circuits, systems and computers. Special Issue on Chua.s Circuit: Paradigm for Chaos. 1993. V. 3(2).

[2]Guckenheimer J.M., P. Holmes. Nonlinear Oscillations, Dynamical Systems and Bifurcation of Vector Fields. N.Y. Springer-Verlag,2006.

[3] Филипов Е., Нелинейна електротехника, С.„Техника", 1979.

[4] D.W. Jordon and P. Smith. Nonlinear Ordinary Differential Equation. N.Y. Oxford University Press.1987

[5] I. N. Tabahnev, N. Petkova, Sn. Terzieva, S. Vladov, V. M. Mladenov, "Modeling, Simulations and Implementation of the Chua's Circuit", Proceedings of the IVth International Conference on Challenges in Higher Education and Research in the 21 Century, Heron Press Ltd., Vol. 4 pp. 277-279, Sozopol, May 31 - June 3, 2006, Bulgaria,

A CRITERION FOR THE PRESENCE OF A CHAOTIC PROCESS IN 3-DIMENSION NONLINEAR DYNAMICAL SYSTEM BY AN ASSESSMENT OF THE ENERGY STATE

Galina Cherneva, Elena Dimkina

cherneva@vtu.bg

Todor Kableshkov University of Transport, Sofia, 158 Geo Milev Str
BULGARIA

Key words: *nonlinear dynamic systems, chaotic process , dissipation, Duffing equation*

Abstract: *Mathematical model of continuous non-linear dynamic system (NDS) is a system of nonlinear differential equations. The number of equations, respectively the number of phase variables in them, defined the dimension of the NDS. It be proved that in order to monitor the promiscuous mode, the system must be least three-dimension.*

The theory of differential equations is known that a system of three differential equations of first order with three variables can be presented as an inhomogeneous differential equation of one variable of the second degree.On the basis of this presentation are derived generalized expressions of dissipative and free member of the equation as a measure of the energy state of the system. They are used as a criterion for the occurrence of chaotic mode in the system.

The proposed criterias are applied to nonlinear circuit described not autonomous equation of Duffing. This equation is a model for many circuits whose a nonlinear element is described by a nonlinear function of the third order.