Механика Транспорт Комуникации **ISSN 1312-3823** (print) **ISSN 2367-6620** (online) **том 13, брой 1, 2015 г.**

Научно списание **http://www.mtc-aj.com** **статия № 1106**

МОДЕЛИРАНЕ ДВИЖЕНИЕТО НА МОТОПЕД В НЕХОЛОНОМНА ПОСТАНОВКА

Петър Колев Колев
petarkolev@abv.bg

ВТУ "Тодор Каблешков"
1574 София, ул. Гео Милев 158
БЪЛГАРИЯ

Ключови думи: *Динамично моделиране, нехоломна механика*

Резюме: *Стилизиран модел на мотопед се движи без плъзгане по хоризонтална равнина. Равнината на рамата остава перпендикулярна на хоризонталната равнина на търкаляне на колелата на мотопеда. Изведени са:*

- уравненията на нехолономните връзки

- диференциалните уравнения на движение отчитайки наложените нехолономни връзки на колелата.

Въведение

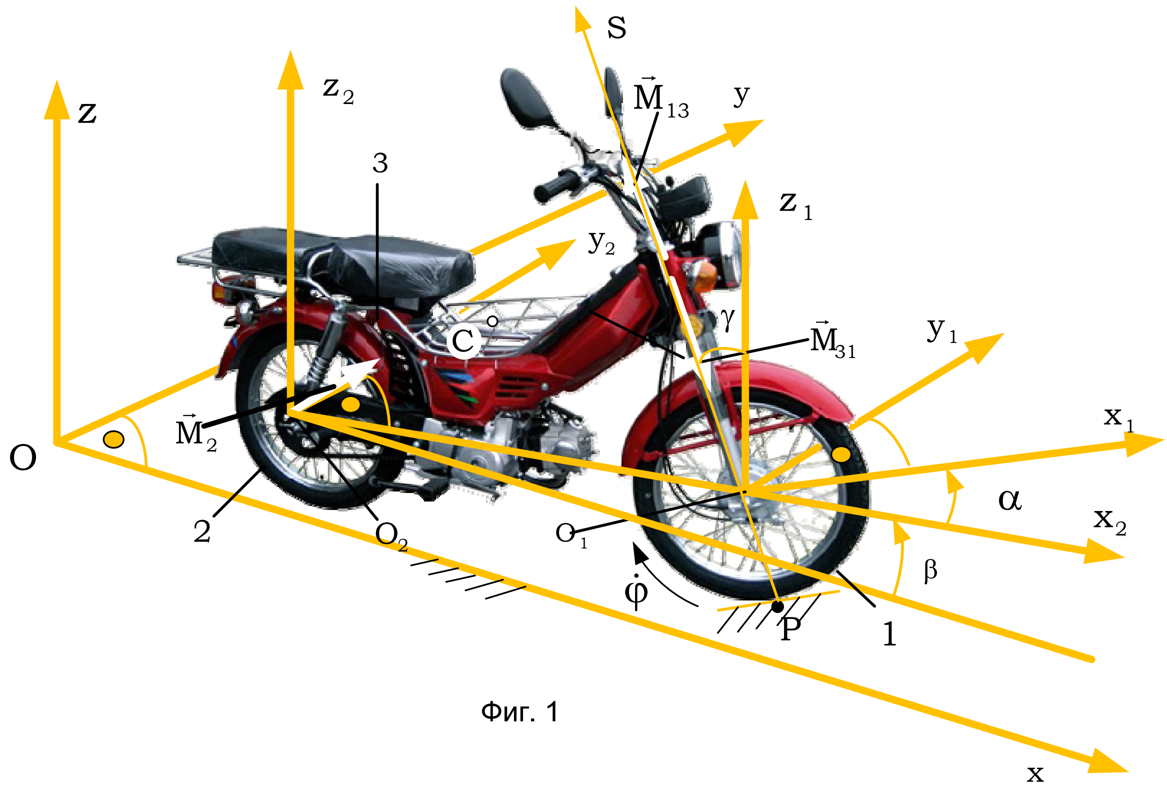
Нехолономната механика е една достатъчно сложна теория, поради което не се изучава в класическите курсове по аналитична механика. Изводът на диференциалните уравнения на движение на механични системи подчинени на нехолономни връзки е труден , но основен в динамичния анализ на нехолономни системи. В този труд се моделира динамиката на двуколесно превозно средство (за краткост – мотопед) в нехолономна постановка. Мотопедът се движи без плъзгане по хоризонтална равнина, като равнината на рамата остава перпендикулярна на хоризонталната равнина на търкаляне на колелата на мотопеда. Извеждат се:

- уравненията на нехолономните връзки;
- диференциалните уравнения на движение отчитайки наложените нехолономни връзки на колелата.

Равнината по която се движи мотопедът е означена с Oxy. Рамата остава вертикална. Движението се извършва под действието на двигателния момент $\vec{M}_2$, а управлението от момента $\vec{M}_{13}$. Направлението му съвпада с това на кормилната вилкаи сключва ъгъл γ с вертикалната ос. С първото колело е свързана координатната система $O_1x_1y_1z_1$, а с второто $O_2x_2y_2z_2$. Точките O_1 и O_2 лежат във вертикалната равнина на симетрия на мотопеда на разстояние $\overline{O_1O_2} = \ell$. Масата на мотопеда заедно с тази на моториста е означена с m. Точката $C(x_{2,C}, y_{2,C} = 0, z_{2,C})$ – е масовия център на системата с неговите координати в $O_2x_2y_2z_2$. Разстоянието между т. O_2 и масовия център C е равно на L. $J_{z,C}^{(3)}$ е масовия инерционен момент спрямо ос успоредна на остаzi минаваща през масовия център на системата, а J_S - кормилната част. Колелата се търкалят без плъзгане и тяхната маса в това изследване се пренебрегва. Точката P е моментния център на ротация на колелото 1.

Извод на уравненията на нехолономните връзки

Положението и движението на мотопеда се определя с обобщените координати q_j за $j = 1,2....5)$ където $q_1 \equiv x_{O_2}$, $q_2 \equiv y_{O_2}$, $q_3 \equiv \alpha$, $q_4 \equiv \beta$, $q_5 \equiv \varphi$. На мотопеда, като механична система са наложени три нехолономни стационарни връзки $v_{O_2,y_2} = 0$; $v_{P,x_1} = 0$; $v_{P,y_1} = 0$, общото уравнение на които има вида $\mathbf{B}\dot{\mathbf{q}} = 0$. Тук $\dot{\mathbf{q}}$ вектова на обоещените скорости, а $\mathbf{B}$ е правоъгълна матрица, чийто елементи са функщия на обощените координати. За извода на диференциалните уравнения на вдижение ще приложим уравненията на Лагранг от II-ри род с множители.



Фиг. 1

Уравнението на първата нехолономна връзка $v_{O_2,y_2} = 0$ получаваме като проектираме скоростта на центъра на колелото 2 - т. O_2, в неподвижната координатна система проектираме в $O_2x_2y_2z_2$.

$$
(1)\quad \begin{aligned}
&\vec{v}_{O_2} = \left(\dot{q}_1\vec{i} + \dot{q}_2\vec{j}\right)\\
&v_{O_2,y_2} = \left(\dot{q}_1\vec{i} + \dot{q}_2\vec{j}\right)\vec{j}_2 = -\dot{q}_1\sin\beta + \dot{q}_2\cos\beta = -\dot{q}_1\sin q_4 + \dot{q}_2\cos q_4
\end{aligned}.
$$

Следователно уравнението на първата нехолономна връзка приема вида:

$$
(2)\quad \underline{-\dot{q}_1\sin q_4 + \dot{q}_2\cos q_4 = 0}
$$

Останалите две нехолономни връзки ще получим от векторното уравнение за точка P.

(3) $\bar{v}_{O_1} = \bar{v}_{O_2} + \vec{\omega}_3 \times \vec{O_2O_1}$ $\qquad$ $\bar{v}_P = \bar{v}_{O_1} + \vec{\omega}_1 \times \vec{PO_1} = 0$

$$(4)\quad \vec{v}_P = \dot{q}_1\vec{i} + \dot{q}_2\vec{j} + \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 0 & \dot{\beta} \\ \ell\cos\beta & \ell\sin\beta & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \omega_{1x} & \omega_{1y} & \omega_{1z} \\ (O_1P)_x & 0 & (O_1P)_z \end{vmatrix}$$

За да получим уравненията на останалите две нехолономни връзки $v_{P,x_1} = 0$; $v_{P,y_1} = 0$ проектираме уравнението за скоростта на точка P в неподвижната координатна система върху осите на координатната система $O_1x_1y_1z_1$.

$$(5)\quad \begin{aligned} \vec{v}_P.\vec{i}_1 &= \left\{ \dot{q}_1\vec{i} + \dot{q}_2\vec{j} + \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 0 & \dot{q}_4 \\ \ell\cos q_4 & \ell\sin q_4 & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \omega_{1x} & \omega_{1y} & \omega_{1z} \\ (O_1P)_x & 0 & (O_1P)_z \end{vmatrix} \right\} \vec{i}_1 \\ \vec{v}_P.\vec{j}_1 &= \left\{ \dot{q}_1\vec{i} + \dot{q}_2\vec{j} + \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 0 & \dot{q}_4 \\ \ell\cos q_4 & \ell\sin q_4 & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \omega_{1x} & \omega_{1y} & \omega_{1z} \\ (O_1P)_x & 0 & (O_1P)_z \end{vmatrix} \right\} \vec{j}_1 \end{aligned}$$

Развиваме първият израз на (5) като отчитаме, че $O_1P = R_1$:

(6)

$$\begin{aligned} v_{P,x_1} &= \dot{q}_1\cos(\alpha+\beta) + \dot{q}_2\sin(\alpha+\beta) - \dot{\beta}\ell\sin\beta.\cos(\alpha+\beta) + \dot{\beta}\ell\cos\beta.\sin(\alpha+\beta) - \\ &- \omega_1\cos^2(\alpha+\beta)R_1\cos\gamma - \omega_1\sin(\alpha+\beta)^2R_1\cos\gamma = \\ &= \dot{q}_1\cos(\alpha+\beta) + \dot{q}_2\sin(\alpha+\beta) - \dot{\beta}\ell\sin\alpha - \omega_1R_1\cos\gamma \end{aligned}$$

Следователно уравнението на наложената втора нехолономна връзка приема вида:

$$(7)\quad \underline{\dot{q}_1\cos(q_3+q_4) + \dot{q}_2\sin(q_3+q_4) - \dot{q}_4\ell\sin q_3 - \dot{q}_5R_1\cos\gamma = 0}$$

Развиваме втоеият израз на (5)като отчитаме, че $O_1P = R_1$:

(8)

$$\begin{aligned} v_{P,x_1} &= \dot{q}_1\sin(\alpha+\beta) + \dot{q}_2\cos(\alpha+\beta) + \dot{\beta}\ell\sin\beta.\sin(\alpha+\beta) + \dot{\beta}\ell\cos\beta.\cos(\alpha+\beta) - \\ &- \omega_1\sin(\alpha+\beta)\cos(\alpha+\beta)R_1\cos\gamma - \omega_1\cos(\alpha+\beta)\sin(\alpha+\beta)R_1\cos\gamma = \\ &= \dot{q}_1\sin(\alpha+\beta) + \dot{q}_2\cos(\alpha+\beta) + \dot{\beta}\ell\cos\alpha - \omega_1R_1\cos\gamma\sin2(\alpha+\beta) \end{aligned}$$

Следователно уравнението на наложената трета нехолономна връзка приема вида:

$$(9)\quad \underline{\dot{q}_1\sin(q_3+q_4) + \dot{q}_2\cos(q_3+q_4) + \dot{q}_4\ell\cos q_3 - \dot{q}_5R_1\cos\gamma\sin2(q_3+q_4) = 0}$$

Извод на диференциалните уравнения на движение

Определяне на кинетичната енергия:

Определяме скоростта на масовия център на мотопеда.

$$(10)\quad \vec{v}_C = \vec{v}_{O_2} + \vec{\omega}_3 \times \vec{O_2C} \quad \Rightarrow \quad v_C^2 = v_{O_2}^2 + \left(\vec{\omega}_3 \times \vec{O_2C}\right)^2 + 2\vec{v}_{O_2}\left(\vec{\omega}_3 \times \vec{O_2C}\right),$$

А след това и израза на кинетичната енергия

$$(11)\quad T = \frac{1}{2}\left(mv_C^2 + J_{z,C}\omega_3^2 + J_S\omega_k^2\right) = \frac{1}{2}\left\{\begin{array}{l} m\left[\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2 + 2\dot{q}_4 x_{2,C}\left(\dot{q}_2\cos q_4 - \dot{q}_1 \sin q_4\right)\right] + \\ \left(J_{z,C} + mx_{2,C}^2\right)\dot{q}_4^2 + J_S\dot{q}_3^2 \end{array}\right\} =$$

$$= \frac{1}{2}\left\{m\left[\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2 + 2\dot{q}_4 x_{2,C}\left(\dot{q}_2\cos q_4 - \dot{q}_1\sin q_4\right)\right] + J_S\dot{q}_3^2 + J_{z_2,}\dot{q}_4^2\right\}$$

Определяна на обобщените сили:

Ще ги определим с помощта на принципа на възможните мощности.

$$(12)\quad v_{O_2,x_2} = \left(\dot{q}_1\vec{i} + \dot{q}_2\vec{j}\right)\vec{i}_2 = \dot{q}_1\cos\beta - \dot{q}_2\sin\beta = \dot{q}_1\cos q_4 - \dot{q}_2 \sin q_4$$

$$M_2 v_{O_2x_2} + M_{13}(\dot{\alpha} + \dot{\beta}) - M_{31}\dot{\beta} =$$

$$(13)\quad = M_2\frac{\dot{q}_1\cos q_4 - \dot{q}_2\sin q_4}{R_2} + M_{13}(\dot{q}_3 + \dot{q}_4) - M_{31}\dot{q}_4 =$$

$$= M_2\frac{\cos q_4}{R_2}\dot{q}_1 - M_2\frac{\sin q_4}{R_2}\dot{q}_2 + M_{13}\dot{q}_3 + \left(M_{13} - M_{31}\right)\dot{q}_4$$

Следователно:

$$(14)\quad Q_1 = M_2\frac{\cos q_4}{R_2};\quad Q_2 = -M_2\frac{\sin q_4}{R_2};\quad Q_3 = M_{13};\quad Q_4 = 0;\quad Q_5 = 0$$

Диференциалните уравнения на движение извеждаме с уравненията на Лагранж от втори род с множители.

$$(15)\quad \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\mathbf{q}}}\right)^T - \left(\frac{\partial T}{\partial \mathbf{q}}\right)^T = \mathbf{Q}^T + \mathbf{B}^T\boldsymbol{\lambda}^T$$

Където $\boldsymbol{\lambda}^T = (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)^T$ е векторът на неопределените множители

Прилагаме уравненията на Лагранж, където неговите елементи са представени матрично

$$(16)\quad \left|\begin{array}{c} m(\ddot{q}_1 + \ddot{q}_4 x_{2,C}\sin q_4 + \dot{q}_4^2 x_{2,C}\cos q_4) \\ m(\ddot{q}_2 + \ddot{q}_4 x_{2,C}\cos q_4 + \dot{q}_4^2 x_{2,C}\sin q_4) \\ J_S\ddot{q}_3 \\ mx_{2,C}(\ddot{q}_2\cos q_4 - \ddot{q}_1\sin q_4 - \dot{q}_2\dot{q}_4\sin q_4 - \dot{q}_1\dot{q}_4\cos q_4) + J_{C,z}\ddot{q}_4 \\ 0 \end{array}\right| =$$

$$\left|\begin{matrix} M_2\dfrac{\cos q_4}{R_2} \\ -M_2\dfrac{\sin q_4}{R_2} \\ M_{13} \\ 0 \\ 0 \end{matrix}\right| + \left|\begin{matrix} -\sin q_4 & \cos(q_3+q_4) & \sin(q_3+q_4) \\ \cos q_4 & \sin(q_3+q_4) & \cos(q_3+q_4) \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\ell\sin q_3 & \ell\cos q_3 \\ 0 & -R_1\cos\gamma & -R_1\cos\gamma\sin 2(q_3+q_4) \end{matrix}\right| \left|\begin{matrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \end{matrix}\right|$$

от което получаваме диференциалните уравнения на движение на нехолономната система в явен вид:

(17)

$$m(\ddot q_1 + \ddot q_4 x_{2,C}\sin q_4 + \dot q_4^2 x_{2,C}\cos q_4) = \frac{1}{R_2}M_2\cos q_4 - \lambda_1\sin q_4 + \lambda_2\cos(q_3+q_4) +$$
$$+\lambda_3\sin(q_3+q_4)$$
$$m(\ddot q_2 + \ddot q_4 x_{2,C}\cos q_4 + \dot q_4^2 x_{2,C}\sin q_4) = -\frac{1}{R_2}M_2\sin q_4 + \lambda_1\cos q_4 + \lambda_2\sin(q_3+q_4) +$$
$$+\lambda_3\cos(q_3+q_4)$$
$$J_S\ddot q_3 = M_{13}$$
$$mx_{2,C}[\ddot q_2\cos q_4 - \ddot q_1\sin q_4 - \dot q_4(\dot q_1\cos q_4 + \dot q_2\sin q_4)] + J_{C,z}\ddot q_4 = -\lambda_2\ell\sin q_3 + \lambda_3\ell\cos q_3$$
$$0 = \lambda_2 R_1\cos\gamma + \lambda_3 R_1\cos\gamma\sin 2(q_3+q_4)$$

Получената система диференциални уравнения, заедно с уравненията на нехоломните връзки

$$-\dot q_1\sin q_4 + \dot q_2\cos q_4 = 0$$
$$\dot q_1\cos(q_3+q_4) + \dot q_2\sin(q_3+q_4) - \dot q_4\ell\sin q_3 - \dot q_5 R_1\cos\gamma = 0$$
$$\dot q_1\sin(q_3+q_4) + \dot q_2\cos(q_3+q_4) + \dot q_4\ell\cos q_3 - \dot q_5 R_1\cos\gamma\sin 2(q_3+q_4) = 0$$

образува затворена система, чрез която се изследва движението и реакциите на нехолономните връзки представени от неопределените множители.Сложността в анализа на нехолонмните системи се свързва именно със затворената система уравнения и с определянето на уравненията на нехолономните връзки. Решението на тези уравнения и анализа на движението, както и влиянието на различни параметри на системата върху него се извършва труда „Динамичен анализ на движението на двуколесно МПС (мотопед) нехолономна постановка.

Литература:

[1] Ноймн Ю.И.,Фуфаев Н.А. Динамика нехолономнiьх систем. –М., Наука, 1967г.
[2] Паскалев Г., Паскалев П., Греков П., Капитанова М., София, Архимед, 2006г.
[3] Чернева З., Бъчваров Ст., Лилов Л., София, Св. Климент Охридски, 1997г.

SHAPING THE MOPED MOVEMENT IN NOT HOLONOMY SETTING

Petar Kolev Kolev
petarkolev@abv.bg

Todor Kableshkov University of Transport
158 Geo Milev Street, Sofia 1574,
BULGARIA

Key words:*dynamic shaping, not holonomy mechanics*

Abstract:*A stylized moped model is moving on a horiuzontal plane without sliding. The plane of the chassis is perpendicular to the horizontal plane of the moped's wheels.The following formulations are deduced:*

- *equations of not holonomy bonds*
- *differential equations for the movement of not holonomy bonds of the wheels.*