

УСТОЙЧИВОСТ НА КРИВА ТРЪБА, ОЧЕРТАНА ПО ОКРЪЖНОСТ

Димитър Лолов, Светлана Лилкова-Маркова
dlolov@yahoo.com, lilkovasvetlana@gmail.com

Университет по архитектура, строителство и геодезия
1046 София, бул. "Христо Смирненски" 1
БЪЛГАРИЯ

Ключови думи: устойчивост, крива тръба, критична скорост, флуид

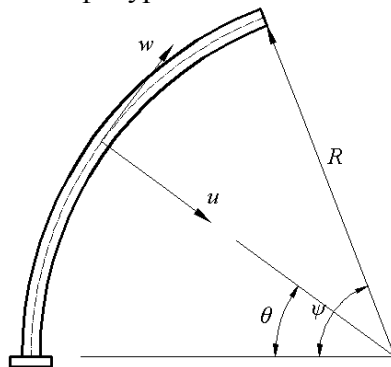
Резюме: В статията числено е изследвана устойчивостта в равнината на тръба, провеждаща флуид и очертана по окръжност, при три случая на подпиране. Провежданият флуид е тежък и несвиваем, транспортиран е с постоянна скорост. В изследването е отчетено и влиянието на деформацията на тръбата по оста и. Получена е зависимостта между критичната скорост на флуида и централния ъгъл на тръбата.

1. Въведение

Настоящата работа представлява продължение на изследванията на авторите върху устойчивостта на криви тръби [1], [2]. Проблемът за устойчивостта на тези системи е значително по-сложен в сравнение с устойчивостта на правите тръби. Неслучайно и изследванията в тази област досега са значително по-малко от тези за праволинейните тръби. Освен това, в голяма част от статиите за криви тръби се приема, че тръбата е неразтежима по оста. Така решението се опростява. В настоящата работа тази предпоставка не е приета.

2. Описание на методиката:

Разглежда се тръба, очертана по част от окръжност с радиус R , имаща коравина на огъване EI , лице на напречното сечение A и изпълнена от линейноеластичен материал. Тръбата провежда тежък и несвиваем флуид с постоянна скорост V . Разглежданата тръба е показана на фигура 1.



Фиг. 1. Геометрия на изследвания тръбопровод.

Диференциалните уравнения, които описват трептенето на тръбата в нейната равнина, записани спрямо осите на естествената координатна система, имат вида:

$$(1) \quad -\frac{EI}{R^4} \left(\frac{\partial^4 u}{\partial \theta^4} + \frac{\partial^3 w}{\partial \theta^3} \right) + \frac{EA}{R^2} \left(\frac{\partial w}{\partial \theta} - u \right) - \frac{MV^2}{R^2} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} + \frac{\partial w}{\partial \theta} \right) - \frac{2MV}{R} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial \theta \partial t} + \frac{\partial w}{\partial t} \right) - (M+m) \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0$$

$$\frac{EI}{R^4} \left(\frac{\partial^3 u}{\partial \theta^3} + \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} \right) + \frac{EA}{R^2} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} - \frac{\partial u}{\partial \theta} \right) + \frac{MV}{R} \left(\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2 w}{\partial \theta \partial t} \right) - (M+m) \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0$$

където t е времето, u и w са преместванията на напречно сечение от тръбата съответно по нормалата и тангентата на естествената координатна система. Масата на тръбата за единица дължина е означена с m , а масата на флуида за единица дължина от тръбата - с M .

С оглед на удобство се дефинират следните бездимензионни величини:

$$(2) \quad \hat{u} = \frac{u}{R}; \quad \hat{w} = \frac{w}{R}; \quad \hat{V} = RV \sqrt{\frac{M}{EI}}; \quad \tau = \frac{t}{R^2} \sqrt{\frac{EI}{M+m}}; \quad \beta = \frac{M}{M+m}; \quad k^2 = \frac{I}{AR^2}$$

В резултат на това се получава системата диференциални уравнения, записани в бездимензионна форма:

$$(3) \quad -k^2 \left(\frac{\partial^4 \hat{u}}{\partial \theta^4} + \frac{\partial^3 \hat{w}}{\partial \theta^3} \right) + \left(\frac{\partial \hat{w}}{\partial \theta} - \hat{u} \right) - k^2 \hat{V}^2 \left(\frac{\partial^2 \hat{u}}{\partial \theta^2} + \frac{\partial \hat{w}}{\partial \theta} \right) - 2\hat{V} \sqrt{\beta} k^2 \left(\frac{\partial^2 \hat{u}}{\partial \theta \partial \tau} + \frac{\partial \hat{w}}{\partial \tau} \right) = k^2 \frac{\partial^2 \hat{u}}{\partial \tau^2}$$

$$k^2 \left(\frac{\partial^3 \hat{u}}{\partial \theta^3} + \frac{\partial^2 \hat{w}}{\partial \theta^2} \right) + \left(\frac{\partial^2 \hat{w}}{\partial \theta^2} - \frac{\partial \hat{u}}{\partial \theta} \right) + \hat{V} \sqrt{\beta} k^2 \left(\frac{\partial \hat{u}}{\partial \tau} - \frac{\partial^2 \hat{w}}{\partial \theta \partial \tau} \right) = k^2 \frac{\partial^2 \hat{w}}{\partial \tau^2}$$

Решението на тази система уравнения се търси във вида [3]:

$$(4) \quad \hat{u}(\theta, \tau) = C_u e^{i(\gamma\theta - \Omega\tau)}; \quad \hat{w}(\theta, \tau) = C_w e^{i(\gamma\theta - \Omega\tau)}.$$

Величините γ и Ω са бездимензионните вълнови числа и кръгова честота. Те се изразяват чрез реалните по следните формули:

$$(5) \quad \gamma = R\Gamma; \quad \Omega = R^2\omega \sqrt{\frac{M+m}{EI}}.$$

Неизвестните интегрционни константи C_u и C_w не са независими. Връзката между тях се изразява по следния начин:

$$(6) \quad \alpha = \frac{C_u}{C_w} = \frac{(k^2+1)\gamma^2 + J\gamma\Omega - k^2\Omega^2}{-k^2i\gamma^3 - i\gamma - J\Omega i}; \quad J = k^2 \hat{V} \sqrt{\beta}.$$

След заместване на изрази (4) в уравнения (3) се получава следната алгебрична система линейни уравнения спрямо константите C_u и C_w :

$$(7) \quad C_w (k^2\gamma^3 i + i\gamma - i\gamma k^2 \hat{V}^2 + 2J\Omega i) + C_u (-k^2\gamma^4 - 1 + k^2 \hat{V}^2 \gamma^2 - 2J\gamma\Omega + k^2\Omega^2) = 0$$

$$C_w (-k^2\gamma^2 - \gamma^2 - J\gamma\Omega + k^2\Omega^2) + C_u (-k^2i\gamma^3 - i\gamma - J\Omega i) = 0$$

За да има системата (7) ненулево решение, е необходимо детерминантата пред коефициентите C_u и C_w да бъде равна на 0. В резултат на това се получава характеристичното уравнение за вълновите числа γ :

$$(8) \quad -k^2\gamma^6 - Jk^2\Omega\gamma^5 + (2k^2 + k^4\Omega^2 + k^2\widehat{V}^2)\gamma^4 + (J\Omega k^2 - 2J\Omega + J\Omega k^2\widehat{V}^2)\gamma^3 + \\ + (-k^2\widehat{V}^2 - k^2 - 2J^2\Omega^2 + k^4\Omega^2 + k^2\Omega^2 - k^4\widehat{V}^2\Omega^2)\gamma^2 + (2J\Omega - J\Omega k^2\widehat{V}^2 + 3Jk^2\Omega^3)\gamma + \\ + 2J^2\Omega^2 + k^2\Omega^2 - k^2\Omega^4 = 0.$$

В случая на ставно подпряна в двата си края тръба се записват следните гранични условия:

$$(9) \quad \widehat{u}(0) = \widehat{u}(\psi) = 0; \quad \widehat{w}(0) = \widehat{w}(\psi) = 0; \quad M(0) = M(\psi) = 0.$$

Диференциалното уравнение на греда, очертана по окръжност е:

$$(10) \quad M = -EI \left(\frac{d^2 u}{ds^2} + \frac{u}{R^2} \right).$$

На базата на (10), последното гранично условие в (9) добива вида:

$$(11) \quad \frac{d^2 \widehat{u}(0)}{ds^2} = \frac{d^2 \widehat{u}(\psi)}{ds^2} = 0.$$

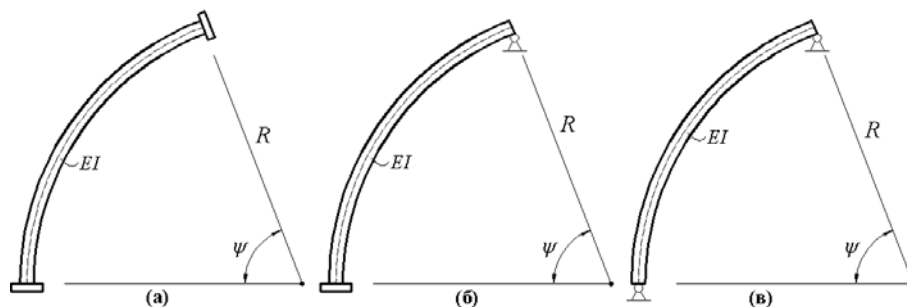
Граничните условия (9) могат да бъдат записани в следната матрична форма:

$$(12) \quad \begin{pmatrix} \widehat{u}(0) \\ \widehat{w}(0) \\ \frac{d^2 \widehat{u}(0)}{d\theta^2} \\ \widehat{u}(\psi) \\ \widehat{w}(\psi) \\ \frac{d^2 \widehat{u}(\psi)}{d\theta^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & \alpha_4 & \alpha_5 & \alpha_6 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ \alpha_1 \gamma_1^2 & \alpha_2 \gamma_2^2 & \alpha_3 \gamma_3^2 & \alpha_4 \gamma_4^2 & \alpha_5 \gamma_5^2 & \alpha_6 \gamma_6^2 \\ \alpha_1 e^{i\gamma_1 \psi} & \alpha_2 e^{i\gamma_2 \psi} & \alpha_3 e^{i\gamma_3 \psi} & \alpha_4 e^{i\gamma_4 \psi} & \alpha_5 e^{i\gamma_5 \psi} & \alpha_6 e^{i\gamma_6 \psi} \\ e^{i\gamma_1 \psi} & e^{i\gamma_2 \psi} & e^{i\gamma_3 \psi} & e^{i\gamma_4 \psi} & e^{i\gamma_5 \psi} & e^{i\gamma_6 \psi} \\ \alpha_1 \gamma_1^2 e^{i\gamma_1 \psi} & \alpha_2 \gamma_2^2 e^{i\gamma_2 \psi} & \alpha_3 \gamma_3^2 e^{i\gamma_3 \psi} & \alpha_4 \gamma_4^2 e^{i\gamma_4 \psi} & \alpha_5 \gamma_5^2 e^{i\gamma_5 \psi} & \alpha_6 \gamma_6^2 e^{i\gamma_6 \psi} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_{w1} \\ C_{w2} \\ C_{w3} \\ C_{w4} \\ C_{w5} \\ C_{w6} \end{pmatrix}.$$

За да има системата (12) ненулево решение, е необходимо детерминантата на матрицата пред неизвестните константи да бъде равна на нула. Това представлява условие за намиране на критичната скорост \widehat{V}_{cr} - скоростта, при която системата загубва устойчивост. За определянето на \widehat{V}_{cr} се спазва следната процедура: скоростта на флуида \widehat{V} и честотата Ω се варират, докато детерминантата стане равна на нула. Най-малката стойност на скоростта, за която е изпълнено това условие, е \widehat{V}_{cr} .

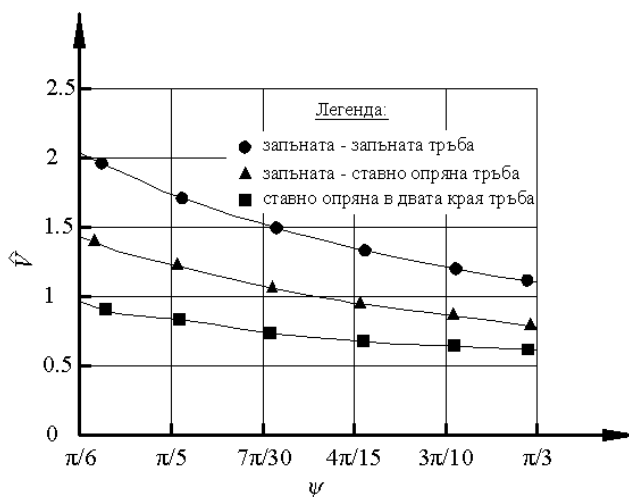
3. Приложение на метода за конкретен пример:

Числените изследвания в настоящата работа са извършени върху три греди с геометрия и статическа схема съгласно фиг.2.



Фиг. 2. Геометрия и статически схеми на изследваните тръбопроводи.

Коравината на огъване на тръбите е $EI = 2914 \text{ kNm}^2$, а плътността на транспортираната течност - $\rho = 800 \text{ kg/m}^3$. Изследвано е влиянието на централния ъгъл ψ върху критичната скорост на системата. Решението е извършено чрез програмния продукт MATLAB. Резултатите са представени на фигура 3.



Фиг. 3. Зависимост между \widehat{V}_{cr} и централния ъгъл ψ .

4. Изводи:

На базата на числените изследвания е установено, че и за трите изследвани тръби с увеличаване на централния ъгъл ψ критичната скорост на флуида \widehat{V}_{cr} намалява. Изчисленията показват, че в рамките на изследвания интервал за централния ъгъл ψ най-устойчива се оказва тръбата от фиг.2(a), а най-неустойчива е тази от фиг.2(в). Графиките наподобяват по вид получените резултати в [2].

Литература

- [1]. Лолов Д., Св. Лилкова-Маркова Собствени трептения извън равнината на крива равнинна тръба, провеждаща флуид, при два случая на подпиране. (Sobstvenni treptenia izvan ravninata na kriva ravninna traba, provejdashta fluid) Годишник УАСГ, Vol. XLII, свитък II, София, 2006
- [2]. Лолов Д., Св. Лилкова-Маркова Определяне на критичната скорост на флуид, протичащ в крива тръба, очертана по окръжност. (Opredeliene na kritichnata skorost na

fluid, protichasht v kriva traba, ochertana po okrajnost) Годишник УАСГ, Vol. XLII, свитък VIII София, 2006

[3]. Kang B., C. Riedel, C. Tan Free vibration analysis of planar curved beams by wave propagation. Journal of sound and vibration, 260, 2003

[4] Wu J., Shih P. The dynamic analysis of a multispan fluid-conveying pipe subjected to external load, "Journal of Sound and Vibration", vol.239, 2001, pp. 201-215

STABILITY OF A CURVED PIPE OUTLINED ON AN ARC OF CIRCLE

D. Lolov Sv. Lilkova-Markova

dlolov@yahoo.com, lilkovasvetlana@gmail.com

**University of Architecture, Civil Engineering and Geodesy
1046 Sofia, 1 "Hristo Smirnenski" blvd.
BULGARIA**

***Key words:** stability, critical load, viscoelasticity, annular plate*

***Abstract:** The stability of plane pipe, conveying fluid and outlined on a circle is investigated in three cases of supporting. The fluid is heavy and non-compressible. Its velocity is constant. The influence of the deformation of a pipe in its axis is considered. The relation between the critical velocity of the fluid and the central angle of the pipe is obtained.*