**Механика
Транспорт
Комуникации**

Научно списание

ISSN 1312-3823

том 12, брой 3/2, 2014 г.

статия № 1036

http://www.mtc-aj.com

АНАЛИТИЧНО ИЗСЛЕДВАНЕ НА ХАОТИЧНИ ПРОЦЕСИ В НЕЛИНЕЙНИ ЕЛЕКТРИЧЕСКИ ВЕРИГИ, МОДЕЛИРАНИ С УРАВНЕНИЕТО НА ДЮФИНГ

Галина Чернева
cherneva@vtu.bg

***ВТУ "Тодор Каблешков", София, 1574, ул. "Гео Милев" 158,
БЪЛГАРИЯ***

Ключови думи: *нелинейни динамични системи, хаотичен режим, теория на Мелников, уравнение на Дюфинг*

Резюме: *В работата е предложено изследване на условията, при които възниква хаотичен процес в нелинейна динамична система, чрез аналитичен метод, основан на теорията на Мелников. Изложени са основните принципни положения на теорията и е дефинирана функцията на Мелников за система, описана с уравнението на Дюфинг, при хармонично въздействие. Изведените аналитични зависимости са приложени към нелинейна електрическа верига, моделирана с това уравнение.*

1. Въведение в проблема

За изследване на динамиката на нерегулярните процеси, възникващи в нелинейни динамични системи (НДС), много често се прилагат числени методи и компютърна симулация. Тези методи, обаче, не осигуряват качествено изследване на нелинейните диференциални уравнения, описващи системата. Чрез тях не винаги се отчита поведението на разглежданата система в цялата фазова равнина. Това налага търсенето на аналитични методи за изследване на хаотични процеси в НДС.

Мощен апарат, който дава възможност за получаване на аналитични резултати относно условията за възникване на хаотични колебания, е теорията на Мелников [1,2,3,4]. Първоначално тази теория е приложена при решаване на задачи от ядрената физика (изследване на ускорението на елементарните частици, термоядрените реакции и др.). Методът на Мелников намира приложение и при анализ на задачи от електротехниката: изследване на електронни прибори, основани на ефекта на Джозефсон [6]; анализ и синтез на автоколебателни системи чрез изследване на граничните цикли в системата [5,7,8,9] и др.

Уравнението на Дюфинг [13] е нелинейно диференциално уравнение от втори ред с кубична нелинейна функция. Чрез това уравнение, което се изразява в няколко форми (опростена и разширена, автономна, неавтономна), се моделират много електрически вериги [11]. Повечето публикации [3,11,14] са свързани с анализ на периодичните автоколебания в тях или с числено изследване на хаотичните процеси.

В настоящата работа теорията на Мелников е приложена за получаване на необходимите условия за възникване на хаотични колебания в нелинейна динамична система, описана с уравнението на Дюфинг, при наличие на хармонично въздействие. Методът е илюстриран с изследване на конкретна електрическа верига.

2. Теоретична постановка на метода на Мелников

В основата на теорията на Мелников са бифуркационна теорема и функция (интеграл) на Мелников [1,2,3,4], която играе роля на количествена мярка на разстоянието между устойчиви и неустойчиви многообразия на системата [10]. Интегрирането може да се извършва както по линия във фазовата равнина, така и по времето.

За различните конкретни случаи функциите на Мелников са различни, като се определят от дисипативните сили в системата и от вида на смущението. Съгласно теорията на Мелников, възникването на хаотични колебания в НДС е свързано със съществуването на прости нули на описващата я едноименна функция [1].

Намирането на нулите на функцията на Мелников в много случаи е свързано със сложни математични операции. Оказва се, че тази задача е част и от $16^{\text{-ия}}$ проблем на Хилберт, който в общ случай, не е решен и досега [12].

За да се изясни постановката на метода на Мелников нека първоначално се разгледа НДС, описана с уравнение от вида

(1) $\quad \dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) \quad ,$

където

$\boldsymbol{x}=(x_1,x_2,\dots,x_n)^{\mathrm{T}} \in \mathbf{R}^{n}$,

$\boldsymbol{f}= (f_1, f_2,\dots,f_n)^{\mathrm{T}}$ е аналитична нелинейна функция, определена в E, $E \supseteq \mathbf{R}^{n}$.

Система (1) е несмутена система.

Решението на (1), удовлетворяващо начално условие $\boldsymbol{x}(t_0)= \boldsymbol{x_0}$, е от вида $\boldsymbol{x}(\boldsymbol{x_0},t_0,t)$.

Известно е, че система от вида (1) има особени точки, чийто тип се определя от характера на собствените числа на якобиана на системата. В общ случай поне една от тях е тип „седло”, с която има свързана хомоклинична траектория $\boldsymbol{x_h}$ [13].

Нека, с цел опростяване, система (1) е двумерна, като $\boldsymbol{x}=(x_1,x_2)^{\mathrm{T}} \in \mathbf{R}^2$, $\boldsymbol{f}= (f_1, f_2)^{\mathrm{T}}$.

Ако (1) е хамилтонова система, то съществува гладка скаларна функция $H(x_1,x_2)$ (хамилтониан) [13], такава че

(2) $\quad f_1 = \dfrac{\partial H}{\partial x_2}; \qquad f_2 = \dfrac{\partial H}{\partial x_1},$

при което система (1) може да се запише във вида:

(3) $$\left| \begin{aligned} \dot{x}_1 &= \frac{\partial H}{\partial x_2} \\ \dot{x}_2 &= \frac{\partial H}{\partial x_1} \end{aligned} \right. .$$

Доказано е [1,2], че устойчиви и неустойчиви хомоклинични траектории на хамилтоновата система съвпадат.

Поради това в такава система не може да съществува колебание с преходи към хаотично състояние.

В случай, че върху система (1) въздейства някакво смущение, тя вече е смутена и дисипативна и се описва с уравнение:

(4) $\quad \dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) + \varepsilon \boldsymbol{g}(\boldsymbol{x},t) ,$

където

$\boldsymbol{g}=(g_1, g_2,..., g_n)^T$ е аналитична функция на смущението, дефинирана в G, $G \supseteq \mathbf{R}^n$, $0<\varepsilon<<1$ е малък параметър.

За двумерна система $\mathbf{g}=(g_1, g_2)^T \in G \supseteq \mathbf{R}^2$.

В този случай устойчивото и неустойчивото многообразие от траектории на система (4) не съвпада [1] и между тях съществува разстояние (нар. разстояние на Мелников [1]), което се определя от положението на многообразието от хомоклинични траектории на несмутената система.

Нека т.O е особена точка, тип „седло” с хомоклинична траектория:

(5) $\boldsymbol{x_h}=(x_{h1},x_{h2})^T$.

Тогава функцията на Мелников се дефинира [1, 10] във вида:

(6) $$M(t_0)= \int_{-\infty}^{\infty} \boldsymbol{f}[\boldsymbol{x_h}(\tau)] \wedge \boldsymbol{g}[\boldsymbol{x_h}(\tau), \tau + t_0] d\tau .$$

Функция (6) може да се изрази за всеки конкретен случай, при известни $\boldsymbol{f}$, $\boldsymbol{g}$ и $\boldsymbol{x_h}$.

В [10] е доказана теорема, според която, ако функцията на Мелников $M(t_0)$ за една НДС има прости нули, то за достатъчно малко $\varepsilon>0$ съществуват устойчиво и неустойчиво многообразие от хомоклинични траектории, които се пресичат трансверсално.

Тя дава необходимото условие за възникване на хаотичен процес в тази НДС.

3. Извеждане на функцията на Мелников за двумерна НДС с хармонично въздействие

Целта е да се получи аналитичния израз на функцията на Мелников за двумерна смутена НДС, описана с уравнение (4), на която действа смущение във вида:

(7) $\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}, t)=\gamma_m(\boldsymbol{x})\cos(\omega t+\psi)$, $m=1,2$.

Първоначално се разглежда смущение от вида:

(8) $\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}, t)= [\gamma_m(\boldsymbol{x}, t)+p_m(\boldsymbol{x})]$, $m=1,2$.

Функцията на Мелников, изразена съобразно зависимости (6) и (8), е:

$$M(t_0)= \int_{-\infty}^{\infty} [f_1(\boldsymbol{x_h}(\tau)p_2(\boldsymbol{x_h}(\tau))) - f_2(\boldsymbol{x_h}(\tau)p_1(\boldsymbol{x_h}(\tau)))] d\tau +$$

$$+ \int_{-\infty}^{\infty} [f_1(\boldsymbol{x_h}(\tau)\gamma_2(\boldsymbol{x_h}(\tau), \tau + t_0)) - f_2(\boldsymbol{x_h}(\tau)\gamma_1(\boldsymbol{x_h}(\tau), \tau + t_0))] d\tau =$$

(9) $$= - K + \int_{-\infty}^{\infty} [f_1(\boldsymbol{x_h}(\tau)\gamma_2(\boldsymbol{x_h}(\tau), \tau + t_0)) - f_2(\boldsymbol{x_h}(\tau)\gamma_1(\boldsymbol{x_h}(\tau), \tau + t_0))] d\tau ,$$

където

(10) $$K = \int_{-\infty}^{\infty} [f_2(\boldsymbol{x_h}(\tau)p_1(\boldsymbol{x_h}(\tau))) - f_1(\boldsymbol{x_h}(\tau)p_2(\boldsymbol{x_h}(\tau)))] d\tau .$$

Ако в (8) се положи $\gamma_m(\boldsymbol{x}, t)= \gamma_m(\boldsymbol{x})P(t)$, $(m=1,2)$ и се замести в (9), се получава:

$$M(t_0)= - K + \int_{-\infty}^{\infty} [f_1(\boldsymbol{x_h}(\tau))\gamma_2(\boldsymbol{x_h}(\tau)) - f_2(\boldsymbol{x_h}(\tau))\gamma_1(\boldsymbol{x_h}(\tau))] \boldsymbol{P}(\tau + t_0) d\tau =$$

$$= - K + \int_{-\infty}^{\infty} [f_1(\boldsymbol{x_h}(-\tau))\gamma_2(\boldsymbol{x_h}(-\tau)) - f_2(\boldsymbol{x_h}(-\tau))\gamma_1(\boldsymbol{x_h}(-\tau))] \boldsymbol{P}(-\tau + t_0) d\tau =$$

(11) $$= - K + \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) P(t_0 - \tau) d\tau \quad ,$$

където

(12) $$h(\tau) = f_1(\boldsymbol{x_h}(-\tau))\gamma_2(\boldsymbol{x_h}(-\tau)) - f_2(\boldsymbol{x_h}(-\tau))\gamma_1(\boldsymbol{x_h}(-\tau)) \, .$$

От зависимост (11) следва изводът, че функцията на Мелников е конволюция на функциите $h(\tau)$ и $P(t_0 - \tau)$.

Ако $P(t) = cos(\omega t + \psi)$, то съобразно зависимост (11) може да се запише комплексната форма на функцията на Мелников:

(13) $$\dot{M}(t_0) = -K + \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) e^{j[\omega(t_0 - \tau) + \psi]} d\tau = -K + e^{j(\omega t_0 + \psi)} \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau \, .$$

След полагания:

(14,а) $$Q(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau \, ;$$

(14,б) $$C(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) cos\omega\tau \; d\tau \, ;$$

(14,в) $$D(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) sin\omega\tau \; d\tau \, ;$$

(14,г) $$Q(\omega) = \sqrt{C^2(\omega) + D^2(\omega)} \, ;$$

(14,д) $$\varphi(\omega) = arg\{Q(j\omega)\} = arctg \frac{D(\omega)}{C(\omega)},$$

за функцията на Мелников при хармонично въздействие се получава:

(15) $$M(t_0) = Re\{\dot{M}(t_0)\} = -K + Q(\omega) cos[\omega t_0 + \psi + \varphi(\omega)] \quad .$$

4. Получаване на функцията на Мелников за НДС, описана с уравнение на Дюфинг, при хармонично въздействие

Общият вид на уравнението на Дюфинг, описващо нелинейна електрическа верига при хармонично въздействие, е

(16) $$\ddot{x} + k\dot{x} + F(x) = Acos\,\omega t \, .$$

Това уравнение е модел на вериги, чийто нелинеен елемент се описва с функция от трети ред.

Функцията $F(x)$ в (16) може да е от вида

(17,а) $$F(x) = ax + bx^3, \; a > 0, b > 0 \, ,$$

ако нелинейният елемент е с положителна нелинейна проводимост, или

(17,б) $$F(x) = -ax + bx^3, \; a > 0, b > 0 \, ,$$

когато нелинейният елемент е с отрицателна нелинейна проводимост.

Представено като система от две уравнения от първи ред, (16) се записва във вида:

(18) $$\left| \begin{array}{l} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = ax_1 - bx_1^3 + [-kx_2 + Acos\,\omega t] \end{array} \right. \quad . \; a > 0, b > 0 \, .$$

Хамилтонианът на хамилтоновата система, изразаваща опростената форма на хомогенното уравнение (16) е:

(19) $$H(x_1,x_2) = -\frac{ax_1^2}{2} + \frac{x_2^2}{2} + \frac{bx_1^4}{4} \ .$$

Хомоклиничните траектории на система (18) се получават

(20) $$\left\{x_{h1}^{\pm}(t), x_{h2}^{\pm}(t)\right\} = \left\{\pm\sqrt{\frac{2a}{b}}\,sech\sqrt{a}.t,\ \mp a\sqrt{\frac{2}{b}}\,sech\sqrt{a}.t.th\sqrt{a}.t\right\}.$$

В (20) знаците „+” и „-” определят траекториите в положителна и отрицателна, по отношение на оста x_1, полуравнини.

Като се вземе предвид, че в уравнение (12) $\gamma_1 = 0, \gamma_2 = A = const$, както и зависимост (14,б), следва, че в разглеждания случай:

$$C(\omega) = 0 \ ;$$

$$D(\omega) = A\sqrt{\frac{2}{b}}\pi\omega\, sech\frac{\pi\omega}{2\sqrt{a}} \ ;$$

$$Q(\omega) = D(\omega).$$

Като се използват уравнения (10), (13), (15) и (20), след преобразувания, функцията на Мелников се получава:

(21) $$M(t_0) = -\frac{4k\sqrt[3]{a^2}}{3b} + A\sqrt{\frac{2}{b}}\pi\omega\, sech\frac{\pi\omega}{2\sqrt{a}}\sin\omega t_0 \quad .$$

Разглежданият случай може да се опрости, ако $a = b = 1$. Тогава функцията на Мелников се изразява като:

(22 $$M(t_0) = -\frac{4k}{3} + A\sqrt{2}\pi\omega\, sech\frac{\pi\omega}{2}\sin\omega t_0 \quad .$$

За да има (22) проста нула, трябва да трябва да е изпълнено:

(23) $$A > \frac{4k}{3\omega\pi\sqrt{2}\, sech\frac{\pi\omega}{2}}.$$

Зависимост (23) представлява необходимото условие, при което възниква хаотичен режим в разглежданата система.

5. Изводи

В работата е изведен аналитичен израз за функцията на Мелников за двумерна смутена НДС, описана с уравнение на Дюфинг, чийто прототип е нелинейна електрическа верига. Чрез него е получено необходимото условие, при което възниква хаотично колебание във веригата с хармонично въздействие. Изведената зависимост (23) дава връзка между параметрите на синусоидалния сигнал и елементите на веригата, при която настъпва хаотичен процес.

Литература

[1] Мельников В. К., Об устойчивости центра при периодических по времени возмущениях”, „Труды ММО”, 1963, том 12, стр. 3-52.

[2] Chow S. N., M. Yamashita, Geometry of the Melnikov Vector”, in Nonlinear Equations in the Applied Sciences, Editors: W. F. Ames, C. D. Rogers, Mathematics in Science and Engineering, vol. 185, Academic Press, New York, 1992, pp.79-148.

[3] Yagasaki K., The Melnikov Theory for Subharmonics and Their Bifurcations in Forced Oscillations, “SIAM Journal on Applied Mathematics”, vol. 56, № 6, pp. 1720-1765, Dec. 1996.
[4] Li W., J. Llibre, X. Zhang, Melnikov Functions for Period Annulus, Nondegenerate Centers, Heteroclinic and Homoclinic Cycles, “Pacific Journal of Mathematics”, vol. 213, № 1, pp. 49-77, Jan. 2004.
[5] Bonnin M., Harmonic Balance, Melnikov Method and Nonlinear Oscillators under Resonant Perturbation., “International Journal of Circuit Theory and Applications”, vol. 36, № 3, pp. 247-274, 2008.
[6] Genchev Z., Ivanov Z., Todorov B. Effect of periodic perturbation on radio frecuency model of Josephson junction. IEEE Transactions on Circuits and Systems.1983.V. CAS-30,pp.633-636.
[7]. Георгиев Ж. Гранични цикли и теорията на Мелников. Conference “Advanced Aspects of Theoretical Electrical Engineering”. Sozopol’10, 19– 22.09.10, ISSN 1313-9479. p.131-147
[8] V. Savov, Zh. Georgiev, T. Todorov, I. Karagineva, N Mastorakis, V. Mladenov, Using the Melnikov Function for a Synthesis of Generalized Van der Pol Systems.“WSEAS Trans. On Circuits and Systems”, Volume 5, Issue 11, Nov. 2006, pp 1602-1607, ISSN:1109-2734.
[9] Zh. D. Georgiev, T. G. Todorov, E. D. Manolov, I. L. Karagineva, “Synthesis of sinewave oscillator based on the modified Van der Pol equation using Melnikov theory”, “16th International Scientific and Applied Science Conference ELECTRONICS ET 2007. Proceedings of the conference, Sozopol, Bulgaria, book 1, pp. 74-78, 2007.
[10] Guckenheimer J.M., P. Holmes. Nonlinear Oscillations, Dynamical Systems and Bifurcation of Vector Fields. N.Y. Springer-Verlag,1986,400 pp.
[11] Филипов Е., Нелинейна електротехника, С.„Техника”, 1979.
[12] Хорозов Е. Върху един от нерешените проблеми на Хилберт – шестнадесетият. ФМИ СУ „Св. Кл. Охридски”
[13] Лефшец С. Геометрическая теория дифференциальных уравнений. Едиториал УРСС, Москва, 2004.
[14] Zh. D. Georgiev, I. L. Karagineva, “Analysis and Synthesis of Self-Sustained Oscillators, Described by Perturbed Double Hump Duffing Equations”, “Summer School Advanced Aspects of Theoretical Electrical Engineering, Sozopol’07”, Part II, pp. 79-87, 2007.

ANALYTICAL RESEARCH OF CHAOTIC PROCESSES IN NON-LINEAR ELECTRICAL CIRCUIT MODELING WITH THE EQUATION OF DUFFING

Galina Cherneva
cherneva@vtu.bg

Todor Kableshkov University of Transport, 1574 Sofia, 158 Geo Milev Str BULGARIA

Key words: *nonlinear dynamic systems, chaotic process , Melnikov theory, Duffing equation*

Abstract: *In the paper is proposed to research the conditions under which occurs a chaotic process in a nonlinear dynamic system by an analytical method based on the theory of Melnikov. Exposed are the main principles of the theory and defined are Melnikov’s function for a system described by the equation of Duffing at a harmonious impact. The returnees analytical dependencies are applied to nonlinear circuit witch are modeling with this equation.*