

ОБОБЩЕН МГЕ¹ ЗА ИЗЧИСЛЯВАНЕ НА КИН² НА РАВНИННИ ДИАФРАГМИ ПРИ НАЛИЧИЕ НА СИСТЕМА ОТ УСПОРЕДНИ ПУКНАТИНИ

Господин Господинов

gospgosp_frf@uacg.bg

**Университет по Архитектура, Строителство и Геодезия
катедра “Строителна механика”
бул. “Христо Смирненски” 1, София 1046, БЪЛГАРИЯ**

Ключови думи: *Метод на гранични елементи, успоредни пукнатини, коефициенти за интензивност на напреженията.*

Резюме: *Изложен е накратко обобщения метод на граничните елементи за решаване на статичната равнинна задача при наличие на пукнатини. Приложен е енергетичен подход за изчисляване на КИН за една или няколко успоредни пукнатини. Решени са редица числени примери и е направено сравнение на получените резултати с такива от литературата. Направен е анализ за приложимостта на метода при наличие на главна пукнатина и симулирана система от микропукнатини около нея.*

1. Въведение

При прилагането на методите на линейната механика на разрушението (ЛМР) най-често се разглеждат тела с една съществуваща макропукнатина. От голямо практическо значение е решаването на задача, при която броят на дискретните пукнатини е две или повече, особено ако метода позволява отчитането на взаимодействието между тях.

В работа [1] е предложен един вариант на МГЕ, чрез който е решен въпроса за статическото изследване на равнинни дискове (диафрагми) при наличието на система от праволинейни пукнатини с произволна ориентация.

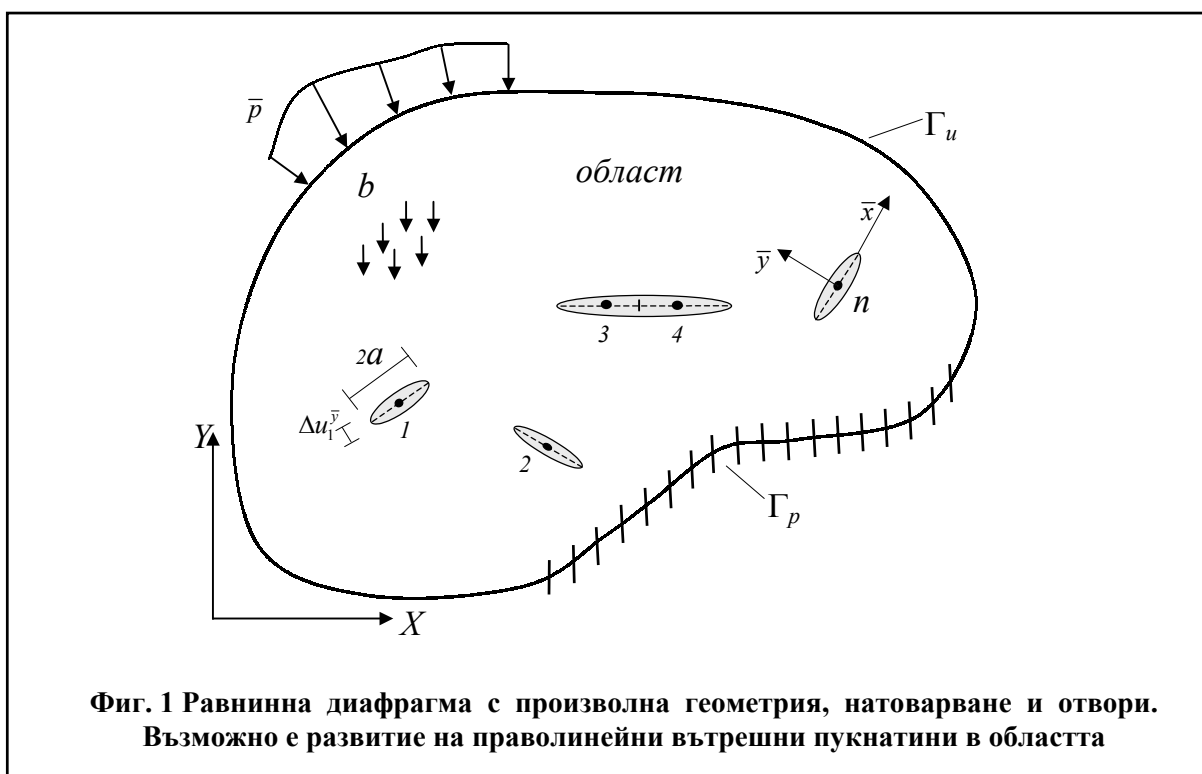
¹ МГЕ – Метод на Граничните Елементи

² КИН – Коефициенти за Интензивност на Напреженията

Методът наподобява т.нар. метод на дисперсните пукнатини в крайните елементи, но тук се реализира скок в преместванията и реално отваряне на пукнатината независимо от размера ѝ. В публикация [2] задачата за определяне на параметрите на механика на разрушението (МР) в случая на две или повече макропукнатини е решена с метода на комплексните променливи, съчетан с МГЕ. Решени са редица полезни практически задачи, за които в справочната литература не могат да се намерят резултати за параметрите на линейната механика на разрушението, например КИН.

2. Обобщен метод на граничните елементи

За решението на задачата ще развием един частен случай на обобщения метод на граничните елементи, който е представен в работа [1].



Разглеждаме равнинно тяло с дебелина t , заемащо областта Ω с произволно очертание на контура Γ (фиг. 1). Тялото е натоварено в равнината си с обемни сили $b(x, y)$ и сили по контура с интензивност $\bar{p}(\Gamma)$. Част от контура Γ_p е подпряна с тангенциални връзки, докато останалата част Γ_u е свободна.

Тялото се намира в равнинно деформирано или напрегнато състояние, като в него съществуват пукнатини с дадени посоки и дължини. Решаването на тази статическа задача се усложнява от наличието на пукнатините, които приемаме че са свободни от напрежения. Предварително формираме n пукнатинни елементи с крайна дължина $2a$, в които се дефинират константни взаимни премествания $\Delta u_1^{\bar{y}}$ и $\Delta u_1^{\bar{x}}$ (нормални и тангенциални - точка 1 на фиг. 1).

В центъра на всеки пукнатинен елемент се дефинира локална координатна система $\bar{x}\bar{o}\bar{y}$ [1].

Граничното интегрално уравнение (ГИУ) за контурната точка x_0 , с което можем да извършим статическото решение на поставената задача, има вида [1]:

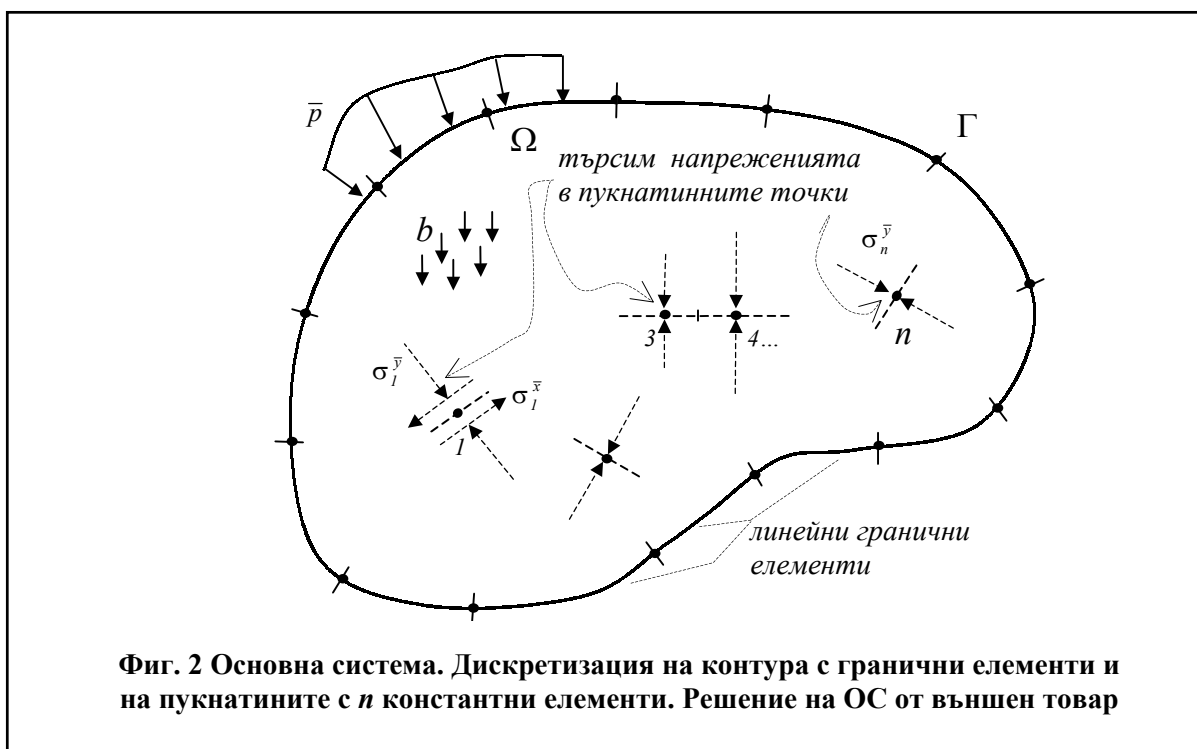
$$(1) \quad c_{ij}(x_0)u_i(x_0) = \int_{\Gamma} u_{ij}^*(x, x_0)p_i(x)d\Gamma(x) - \int_{\Gamma} p_{ij}^*(x, x_0)u_i(x)d\Gamma(x) + \int_{\Omega} u_{ij}^*(x, x_0)b_i(x)d\Omega(x) + \sum_{m=1}^n U_{ij}^*(z_m, x_0)\Delta u_i(z_m).$$

Тук всички фундаментални тензори, както и константата c_{ij} са дефинирани и дадени в работа [1]. Граничните условия на граничната задача са както следва:

$$(2) \quad \begin{aligned} u_i &= \bar{u}_i, & x \in \Gamma_u, \\ p_i &= \bar{p}_i, & x \in \Gamma_p, \end{aligned}$$

където с \bar{u}_i е означена компонентата на зададената функция на преместването по контура.

Гранично интегрално уравнение (1), придружено със смесените гранични условия (2), дефинират напълно линейната гранична задача, която има единствено решение.



На фиг. 2 е дефинирана т. нар. основна система в смисъл на обобщения деформационен метод [1], която първо трябва да решим от външното въздействие по МГЕ. Извършена е дискретизация на контура с линейни гранични елементи, докато пукнатините са разделени на n сегмента (пукнатинни

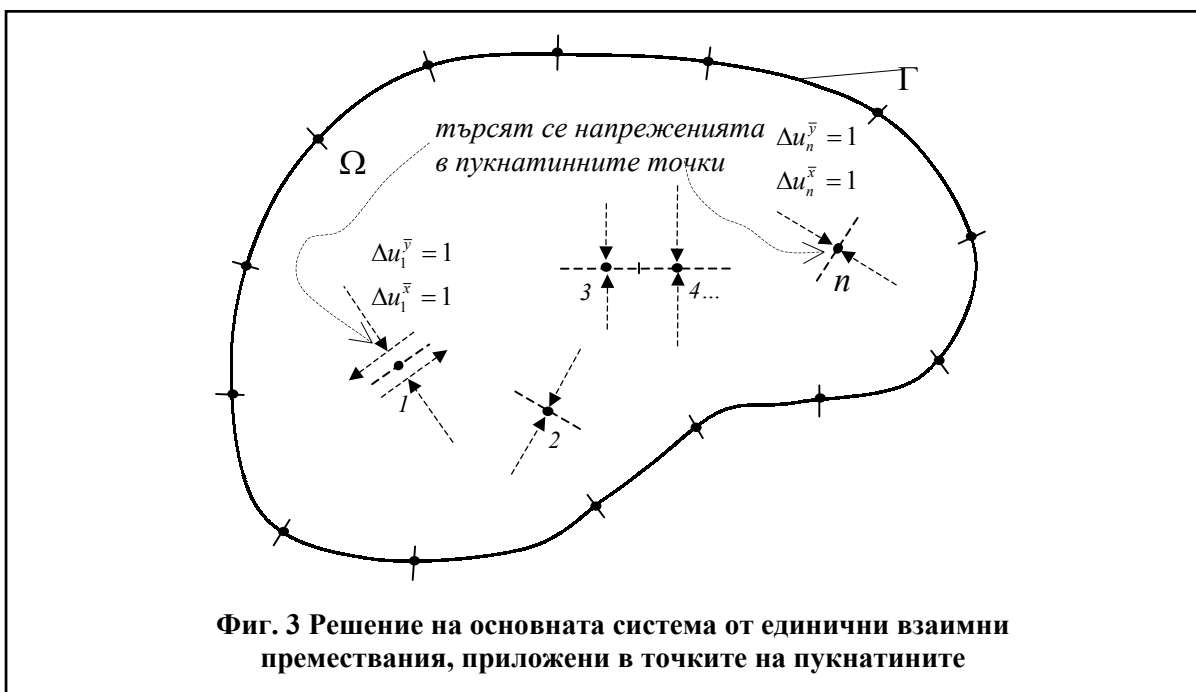
елементи) с крайна дължина $2a$. Във всеки пукнатинен елемент дефинираме двойка (нормални и тангенциални) константни взаимни премествания Δu , които трябва да се изчислят преди формирането на окончателното решение.

Основната система се получава от дадената плоча, като във всяка точка на пукнатините $m=1, 2, \dots, n$ поставяме по 2 мислени тангенциални връзки. Решението по МГЕ се реализира просто и няма да го коментираме [1]. Основен момент в това решение е изчислението на тензора на напреженията в пукнатинните точки. Тези напрежения играят ролята на реактивни усилия в смисъла на обобщения деформационен метод, който ще развием тук. Получените резултати за напреженията в n пукнатинни точки формират вектора $\{R_F^n\}$, който има вида:

$$(3) \quad \{R_F^n\}^T = \{R_{1,F}, R_{2,F}, \dots, R_{n,F}\}.$$

Наричаме го свободен вектор с размерност (n) , като всеки член включва 2 компоненти - по оси X и Y на обобщените усилия.

Следващият важен момент е решението на основната система от единични взаимни премествания (виж фиг.3). Единичните взаимни премествания по глобални оси X и Y се реализират в точките $m=1, 2, \dots, n$, в които се предписва развитие на пукнатини. Решението се извършва отново с МГЕ, като се използва гранично интегрално уравнение (1).



Броят на товарните състояния в този случай е $2n$. Следвайки деформационния метод на строителната механика, изчисляваме $2n$ напрежения

(в добавените мислени връзки), които имат следното квазиматрично представяне:

$$(4) \quad \mathbf{r}_{\Delta u=1}^{n/n} = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & \cdot & \cdot & r_{1n} \\ r_{21} & r_{22} & \cdot & \cdot & r_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ r_{n1} & r_{n2} & \cdot & \cdot & r_{nn} \end{bmatrix},$$

като всеки член на горната матрица се състои от две компоненти, една по ос X и друга по ос Y , а обобщеното реактивно усилие (напрежение) r_{ij} има физическия смисъл на коефициентите на системата канонични уравнения на деформационния метод.

За получаването на неизвестните взаимни премествания в точките n решаваме следната система канонични уравнения:

$$(5) \quad \left[\mathbf{r}_{\Delta u=1}^{n/n} \right] \{ \mathbf{X}_{\Delta}^n \} + \{ \mathbf{R}_F^n \} = \{ \mathbf{0} \},$$

където векторът на неизвестните може да се запише така:

$$(6) \quad \{ \mathbf{X}_{\Delta}^n \}^T = \{ \Delta u_1, \Delta u_2, \dots, \Delta u_n \}.$$

Тук всеки член на вектора \mathbf{X}_{Δ}^n представлява двойката взаимни премествания по оси X и Y . Решението на (5) е както следва:

$$(7) \quad \{ \mathbf{X}_{\Delta}^n \} = - \left[\mathbf{r}_{\Delta u=1}^{n/n} \right]^{-1} \{ \mathbf{R}_F^n \}.$$

По този начин успяхме да намерим взаимните премествания в пукнатинните точки, които са в резултат на външното въздействие. Следващата стъпка е намирането на окончателното решение, което се състои в изчислението на преместванията и напреженията. Това означава да извършим ново решение с МГЕ, чрез използване на ГИУ (1). Ще отбележим, че взаимните премествания Δu_i , които участват в (1) вече са известни – това са компонентите на вектора \mathbf{X}_{Δ}^n .

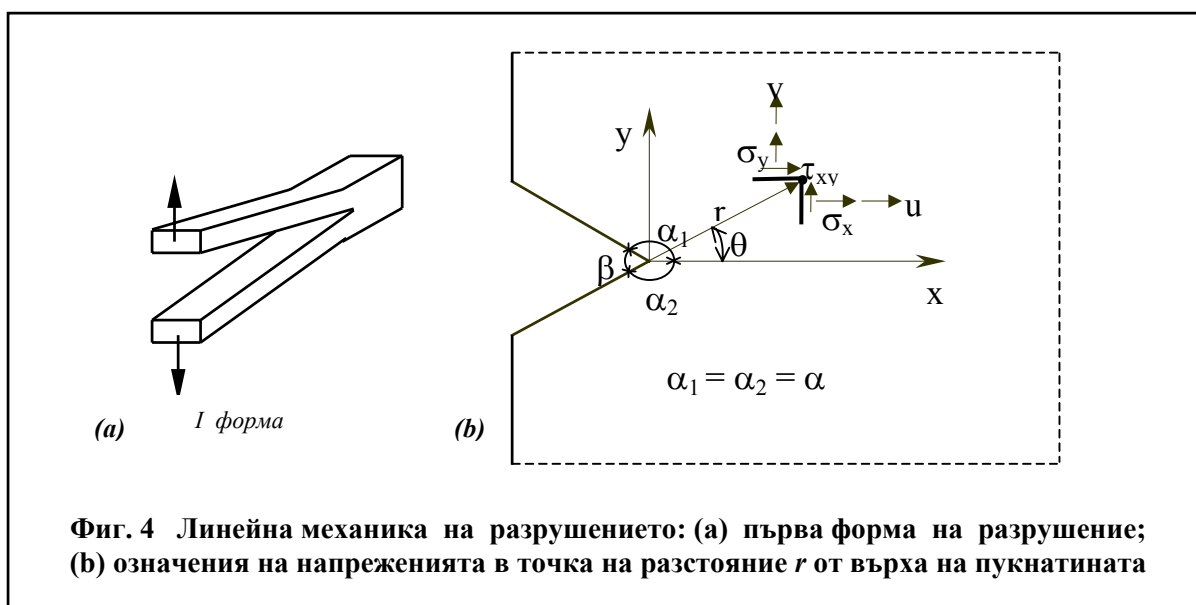
След решението по МГЕ и определянето на действителните гранични функции, преместванията за всяка желана точка от областта се определят отново чрез интегрална зависимост (1) при $c_{ij} = 1$. Интегралното уравнение, чрез което се изчисляват напреженията, има вида:

$$(8) \quad \sigma_{jk}(\xi) = \int_{\Gamma} u_{ijk}^*(\mathbf{x}, \xi) p_i(\mathbf{x}) d\Gamma(\mathbf{x}) - \int_{\Gamma} p_{ijk}^*(\mathbf{x}, \xi) u_i(\mathbf{x}) d\Gamma(\mathbf{x}) + \\ + \int_{\Omega} u_{ijk}^*(\mathbf{x}, \xi) b_i(\mathbf{x}) d\Omega(\mathbf{x}) + \sum_{m=1}^n T_{ijk}^*(z_m, \xi) \Delta u_i(z_m).$$

Отново ще подчертаем, че използваните в интегрално уравнение (8) фундаментални тензори могат да се видят в работа [1].

3. Енергетичен подход в линейната механика на разрушението

В тази работа ще се занимаваме само със симетричната форма на разрушение (виж фиг. 4 (а)), следователно изчислението на КИН ще се сведе единствено до коефициента K_I .



Формулите от ЛМР за функциите на преместванията по оси x и y в равнинната задача, изразени чрез K_I , имат вида:

$$(9) \quad u(x, y) = \frac{K_I}{2G} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \cos \frac{\theta}{2} (k + \cos \theta),$$

$$(10) \quad v(x, y) = \frac{K_I}{2G} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \sin \frac{\theta}{2} (k - \cos \theta),$$

където с G е означен модулът на ъгловите деформации; ν е коефициентът на Poisson; r е разстоянието от върха на пукнатината до точката, в която се търси преместването (виж фиг. 4. (б), където приемаме, че $\beta = 0$); с u и v са означени функциите на хоризонталните и вертикални премествания, а коефициентът k зависи от вида на напрегнатото състояние и има вида [1]:

$$(11) \quad k = \frac{3-\nu}{1+\nu}, \text{ за равнинно напрегнато състояние;} \\ k = 3-4\nu, \text{ за равнинно деформирано състояние.}$$

Уравненията на ЛМР (9) и (10) са изведени при предпоставката за малко r . Ако полето на преместванията е получено достатъчно точно от статическото решение, за конкретна стойност на разстоянието и преместването от (9) или (10) можем да изчислим КИН K_I . При числените методи, като МГЕ или особено МКЕ, тази задача е практически нерешима, освен ако не се използват сингулярни елементи [1], [2]. По тази причина ще приложим друг подход,

използвайки известната зависимост в ЛМР между КИН K_I и скоростта на освободената енергия G_F (СОЕ) [1]:

$$(12) \quad G_F = \frac{K_I^2}{E},$$

или

$$(13) \quad G_F = (1 - \nu^2) \frac{K_I^2}{E},$$

където зависимост (12) се отнася за равнинно напрегнато състояние, а (13) за равнинно деформирано състояние.

Следователно КИН може да се изчисли и чрез СОЕ, ако сме в състояние да я пресметнем достатъчно точно. Известно е, че G_F може да се представи чрез производната на деформационната енергия U по дължината на пукнатината a , т.е. $G_F = \partial U / \partial a$. Ако извършим числено решение при две много близки дължини a и $a + \Delta a$, и изчислим деформационната енергия $U_1 = U_a$ и $U_2 = U_{a+\Delta a}$, то за G_F следва зависимостта [1]:

$$(14) \quad G_F = (U_2 - U_1) / \Delta a,$$

а оттам чрез (12) или (13) стигаме до пресмятането на КИН:

$$(15) \quad K_I = \sqrt{EG_F},$$

за равнинно напрегнато състояние, и

$$(16) \quad K_I = \sqrt{EG_F / (1 - \nu^2)},$$

за равнинно деформирано състояние.

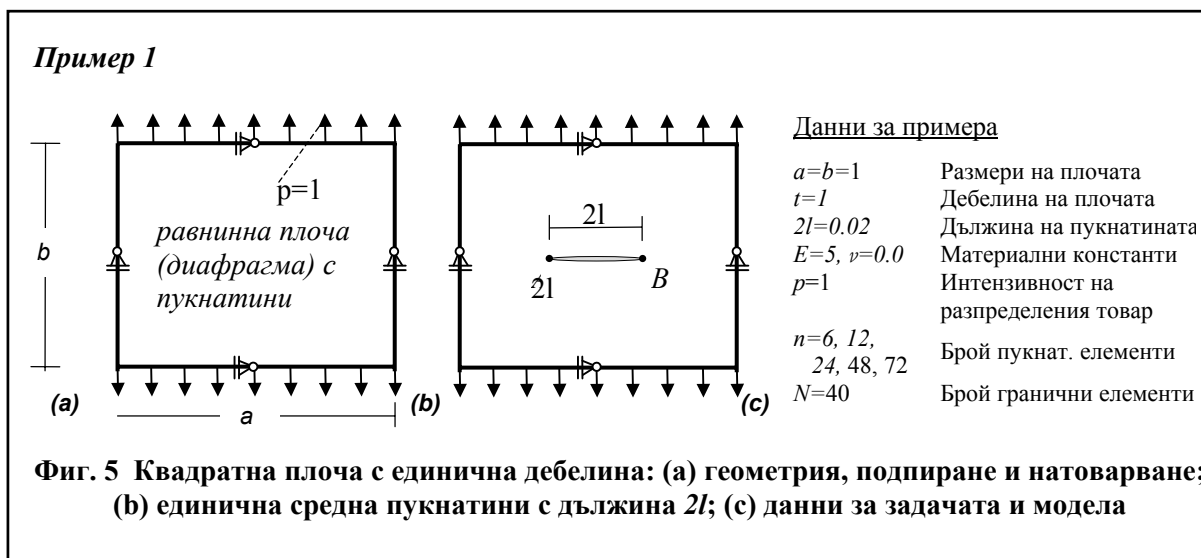
4. Числени резултати

За илюстрация на изложения метод са решени редица числени примери. Започваме с класическата задача за определяне на КИН на безкрайна плоча със средна вътрешна пукнатина (виж пример 1 на фиг. 5). Размерите на квадратната плоча са 1/1, но за да симулираме равномерно разпределено натоварване в безкрайността, дължината на пукнатината се избира много малка: $2l = 0.02$. Броят на линейните гранични елементи е 40 (по 10 на страна), докато числото на константните пукнатинни елементи се променя от 6 до 72 с оглед по-добро проследяване на сходимостта на резултата за КИН. Точният резултат за КИН е $K_I = p\sqrt{\pi l}$. В таблица 1 са показани резултатите от решения при различен брой пукнатинни елементи. Те сходят към точното решение, което е 1 за този частен случай.

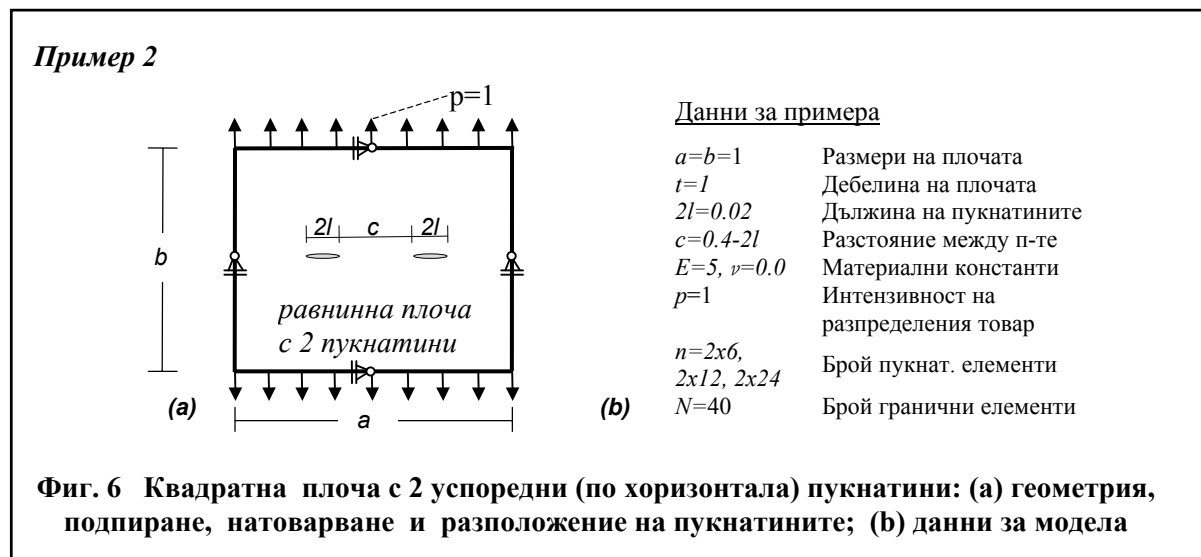
Таблица 1. (Пример 1)

$n =$	6	12	24	48	72	екстраполация
$K_I / \sqrt{\pi l} =$	1.087902	1.048286	1.027908	1.017584	1.014079	1.007261

Една от причините за относително слабата сходимост на резултата при увеличаване на броя на пукнатинните елементи, може да се търси в приетата константната апроксимация на взаимните премествания [1].



Целта на пример 2 е отново да се симулира безкрайна плоча с натоварване в безкрайността, но в този случай имаме 2 успоредни пукнатини с малка дължина $2l=0.02$. Те са поставени на достатъчно голямо разстояние $c=0.4-2l$, така че да намалим взаимното им влияние до минимум (виж фиг. 6).



Точният резултат за КИН е $K_I = p\sqrt{\pi l}$. В таблица 2 са показани резултатите от решения при различен брой пукнатинни елементи, но по равен брой за всяка от двете пукнатини. Те схождат към точното решение, което също е 1 за този случай.

Таблица 2. (Пример 2)

$n=$	2x6	2x12	2x24	екстраполация
$K_I / \sqrt{\pi l} =$	1.087411	1.047778	1.027380	1.006982

В примери 3 и 4 двете пукнатини са поставени на много близко разстояние (виж фиг. 7 и фиг. 8), чрез което симулираме взаимодействие (интеракция) между тях. Дължините им са малки ($2l=0.02$), следователно товарът е достатъчно отдалечен. Резултатите за КИН за пример 3 (вертикални пукнатини) е $K_I / \sqrt{\pi l} = 0.8440$ [2], докато за пример 4 (хоризонтални пукнатини) е $K_I^A / \sqrt{\pi l} = 1.4639$ [2].

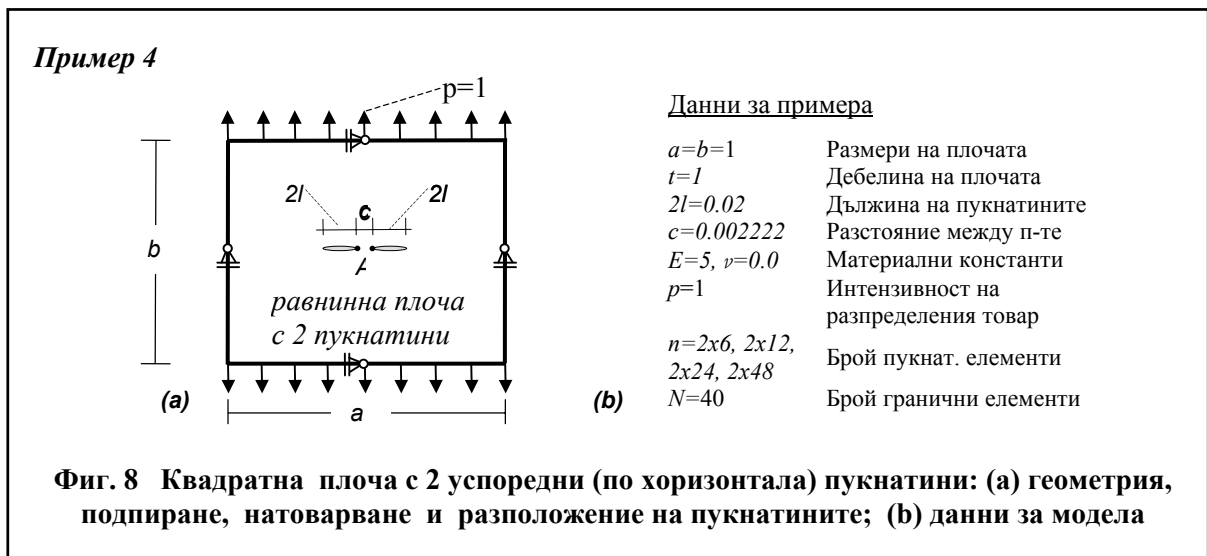
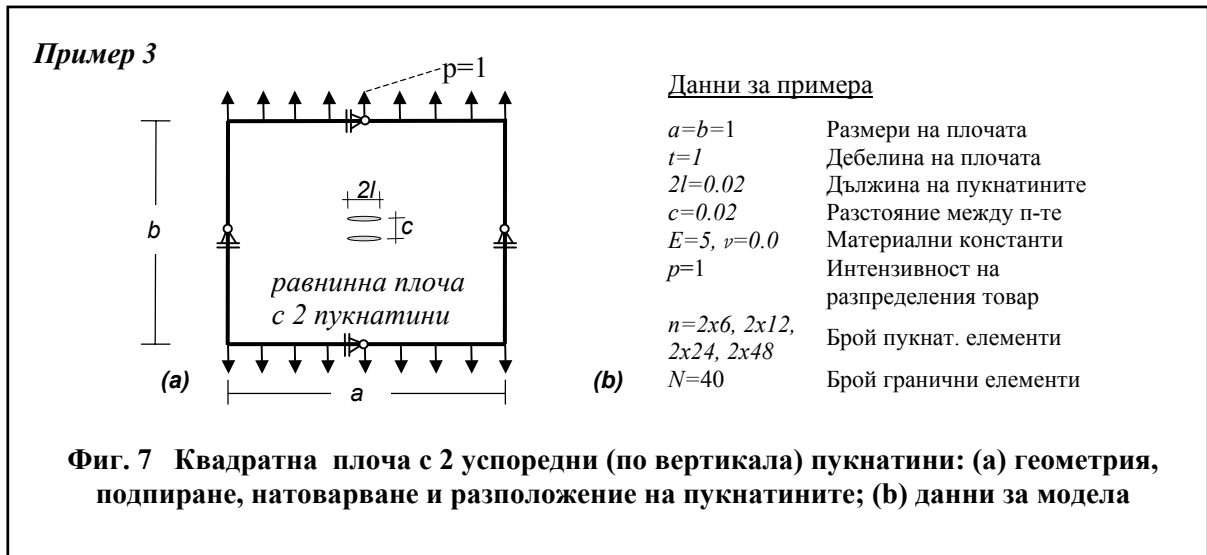


Таблица 3. (Пример 3)

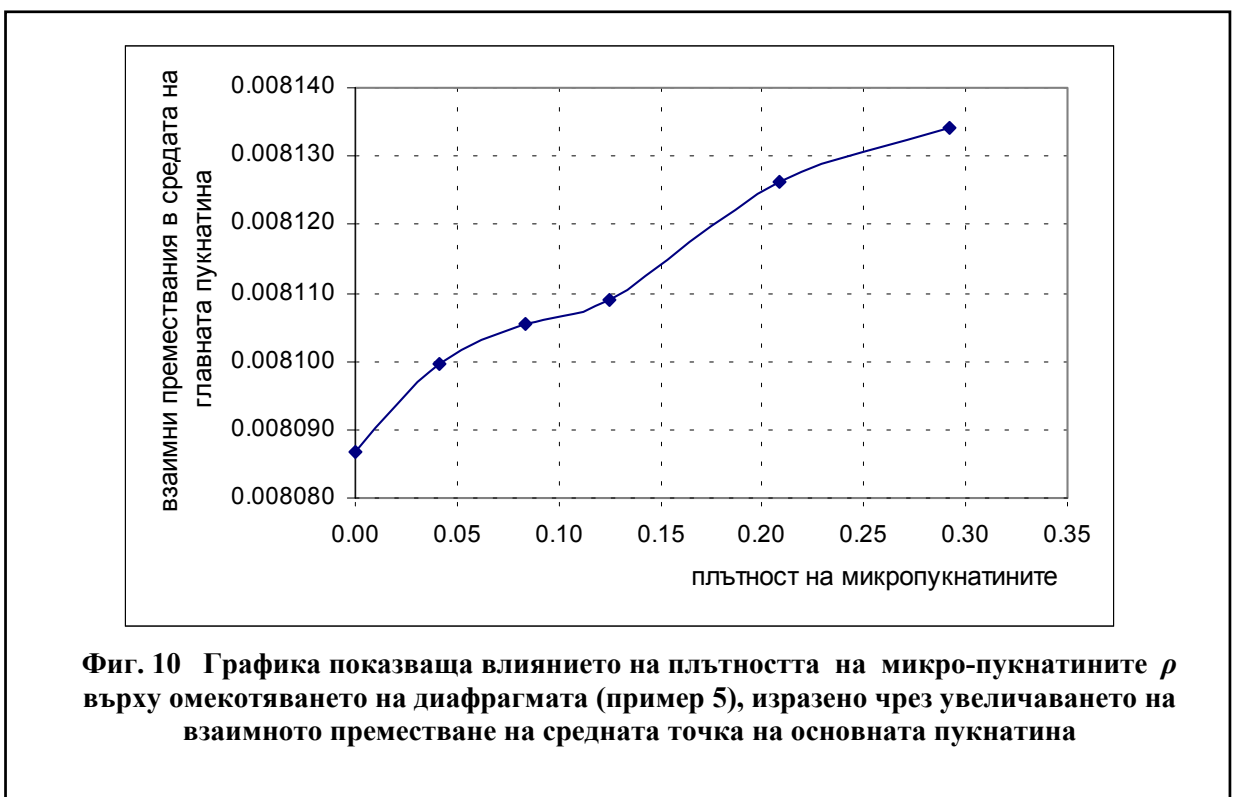
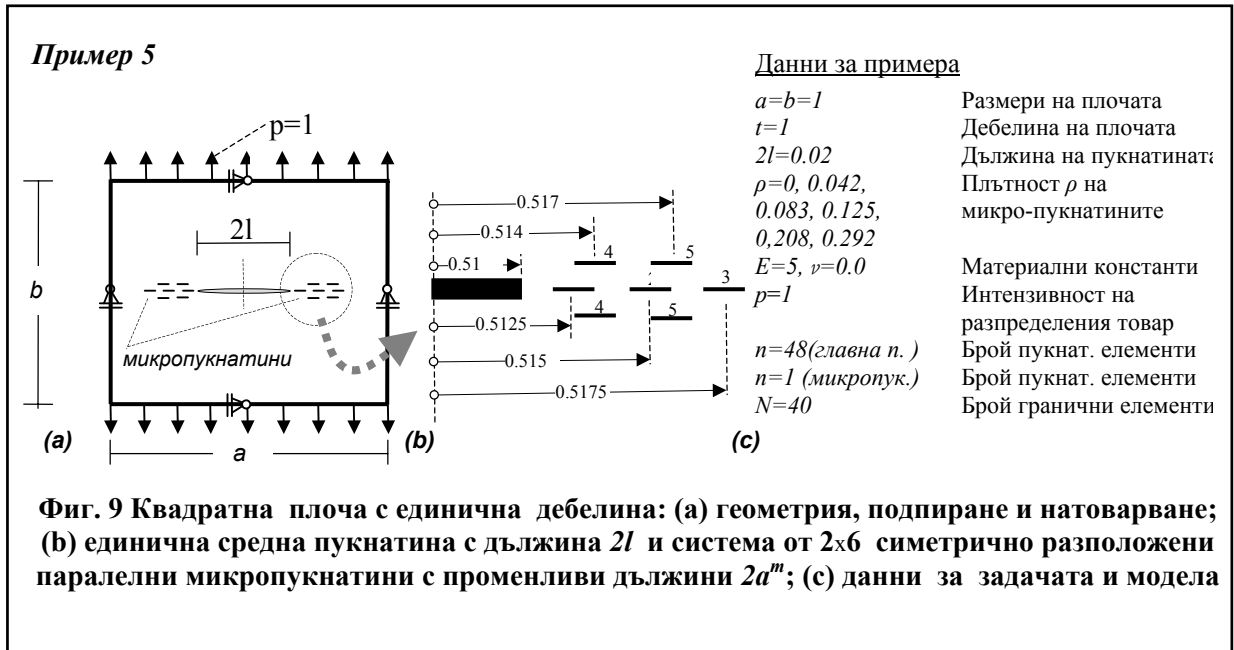
$n=$	2x6	2x12	2x24	2x48	екстраполация	[2]
$K_I / \sqrt{\pi l} =$	0.900652	0.874279	0.860218	0.852999	0.845780	0.8440

Таблица 4. (Пример 4)

$n=$	2x6	2x12	2x24	2x48	екстраполация	[2]
$K_I^A / \sqrt{\pi l} =$	1.863893	1.690657	1.585717	1.531366	1.477014	1.4639

В таблици 3 и 4 са дадени получените резултати за КИН за примери 3 и 4, като са приложени КИН, изчислени чрез екстраполация. За сравнение са дадени КИН, които са взети от работа [2]. Обръщаме внимание, че за пример 4 КИН са изчислени за върховете на пукнатините означени с A .

В пример 5 е разработена идеята за представяне на зоната около главната пукнатина чрез система от малки по дължина пукнатини, чрез които се симулира зона от микро-пукнатини, образувани във върха на главната пукнатина (фиг.9). Така сме в състояние да симулираме зоната на разрушение при квазикрежките материали (като бетона) при наличие на дискретни пукнатини.



За да се илюстрира “омекотяването” на диафрагмата при нарастване на дължината и броя на микро-пукнатините въвеждане един нов параметър, наречен плътност на микро-пукнатините ρ , който има вида:

$$(17) \quad \rho = \frac{\sum 2a^m}{2l},$$

където с a^m сме означили половинката от дължината на всяка микро-пукнатина, а $2l=0.02$ е дължината на основната пукнатина, както може да се види от фиг. 9 (с), а сумирането е по брой микро-пукнатини.

По този начин величината ρ , като отношение на сумарната дължина на микро-пукнатините към дължината $2l$, дава представа за относителното нарастване на влиянието на зоната на разрушението, намираща се пред върха на главната пукнатина. Задачата е решена за различни стойности на параметъра ρ . На фиг. 10 е изобразена графиката на зависимостта плътност-взаимно нормално преместване за средната точка на главната пукнатина. Съвсем логично с нарастване на параметъра ρ се забелязва увеличаване на взаимните премествания при еднакво натоварване. Това е индикация за намаляване на коравината на системата, което води до увеличаване на коефициента за интензивност на напреженията. Ще допълним, че увеличаването на плътността на микро-пукнатините ρ за първите 3 стойности ($\rho=0.042, 0.083$ и 0.125) реализираме чрез последователно използване на микро-пукнатини с номера 1, 1+2 и 1+2+3 (виж фиг. 9 (b)). След това прибавяме по две микро-пукнатини с номера 4 ($\rho=0.208$) и 5 ($\rho=0.292$), което обяснява промяната на вида на графиката на фиг. 10 след четвъртата точка.

5. Заключение

В настоящата работа е показано едно приложение на обобщения МГЕ, предложен в [1], за изчисляване на някои параметри на механика на разрушението при наличие на система от успоредни пукнатини. Методът е ефективен за двата случая: (1) при безкрайни плочи, когато пукнатините не си влияят помежду си; (2) в случая на отчитане на взаимната интеракция между пукнатините. Развита е идеята за приблизителното отчитане на зона с микро-пукнатини, която се образува около върха на дискретна пукнатина при квазикрежки материали.

Числените резултати показват добра устойчивост на решението, като подобрене на точността може да се търси в няколко посоки, например:

- Подобряване на апроксимацията на пукнатинните елементи от константна на линейна или квадратична;
- Въвеждане на т. нар. сингулярни гранични пукнатинни елементи, чрез които ще сме в състояние да отчетем по-коректно напрегнатото състояние във върха на пукнатината.

Реализирането на горните предложения би довело до по-точно представяне на полетата на преместванията и напреженията в околността на върха на пукнатината, следователно до прилагането на по-оптимални и точни методи за изчисление на параметрите на механика на разрушението.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] ГОСПОДИНОВ Г., Развитие на метода на граничните елементи за някои задачи от механика на разрушението . Хабилитационен труд, УАСГ София, 2003.
- [2] DENDA M., Y. F. DONG. Complex variable approach to the BEM for multiple crack problems. Comput. Methods. Appl. Mech. Engrg., **141** (1997), 247-264.

GENERALIZED BEM FOR CALCULATION OF SIF FOR PLANE PANELS WITH MULTIPLE PARALLEL CRACKS

Gospodin Gospodinov

*University of Architecture, Civil Engineering and Geodesy
Division of Structural Mechanics
1 Hristo Smirnenski blv., Sofia 1046, BULGARIA*

Keywords: *Boundary element method, parallel cracks, stress intensity factors.*

Summary: *The generalized boundary element method is shortly described for the static analysis of plane bodies with cracks. An energy approach is applied for the calculation of SIF for one or multiple parallel cracks. Few numerical examples are solved and comparison is made with results available from the literature. Analysis is made for the applicability of the method when the main crack is surrounded by a system of micro-cracks.*