Механика
Транспорт
Комуникации
Научно списание

ISSN 1312-3823
брой 2, 2008 г.
статия № 0223
http://www.mtc-aj.com

ПРИЛОЖЕНИЕ НА ХАУСДОРФОВА ТЕГЛОВНА ФУНКЦИЯ ПРИ СИНТЕЗ НА ЦИФРОВИ ФИЛТРИ С КРАЙНИ ИМПУЛСНИ ХАРАКТЕРИСТИКИ

Петър Апостолов
p_apostolov@abv.bg

Институт за специална техника - МВР
София 1799 бул. Александър Малинов, група "Витоша" ПК 83
БЪЛГАРИЯ

Ключови думи: *Цифров филтър,прозорец, Хаусдорф,функция*

Резюме: *В статията е представена нова тегловна функция, която се получава при апроксимация на делта функция с алгебричен полином, в хаусдорфова метрика. Показани са равенства, които определят параметрите на полинома. Определена е дефиниционната област и е изведена аналитична зависимост, която определя тегловната функция. Графично е показано изменението на тегловната функция, в зависимост от степента на полинома и хаусдорфовото разстояние. На основата на получените зависимости е предложена методика за синтез на цифрови FIR филтри. Изведени са равенства за определяне на импулсната характеристика и честотните характеристики на филтрите. Предложени са зависимости, определящи реда на филтрите и хаусдорфовото разстояние, като функции от ширината на преходната лента и затихването в лентата на задържане. Методът за синтез е илюстриран с числов пример. Направено е сравнение между амплитудно честотните характеристики на Хаусдорф филтър и филтър на Кайзер.*

Въведение

Един от начините за синтез на филтри с крайни импулсни характеристики, или FIR филтри, е методът с тегловни (прозоречни) функции. Идеята при този метод е апроксимация на честотната характеристика на идеален нискочестотен филтър.:

(1)
$$H_d\left(e^{j\omega}\right) = \begin{cases} 1e^{j\omega}, & |\omega| \le \omega_c \\ 0 & , \omega_c < |\omega| \le \pi \end{cases},$$

където ω_c е граничната честота на филтъра. Импулсната характеристика на идеалния филтър се получава от израза

(2) $$h_d(n) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} H_d\left(e^{j\omega}\right) e^{j\omega n} d\omega .$$

За да се получи реализуем филтър е необходимо идеалната импулсна характеристика да бъде ограничена, тъй като реалната импулсна характеристика трябва да бъде нулева за отрицателни стойности на аргумента си n и дефинирана в интервала $0 \le k \le N$, където N е редът на реалния филтър

(3) $$h(n) = \begin{cases} h_d(n), & 0 \le n \le N \\ 0 \end{cases} .$$

Ограничаването на идеалната импулсна характеристика става посредством умножението й с тегловна функция $w(n)$.

(4) $$h(n) = h_d(n) w(n) .$$

В честотната област това е равносилно на конволюция на предавателната функция на идеалния филтър с честотната характеристика на тегловната функция. Конволюцията води до намаляване на стръмността на прехода между лентата на пропускане (ЛП) и лентата на задържане (ЛЗ) и до пулсации в двете ленти в близост до граничната честота, поради ефекта на спектрално наслагване. Тегловните функции са постоянни: Бартлет, фон Хан, Хаминг, Бартлет, Блекман, Блекман-Харис [5] и др., и променливи с параметър: Гаус, Тъки, Чебишев, Пуасон, Кайзер [3] и др. От изброените функции, най добро отношение между стръмност на амплитудно честотната характеристика (АЧХ) и затихване в лентата на задържане се получава с тегловната функция на Кайзер.

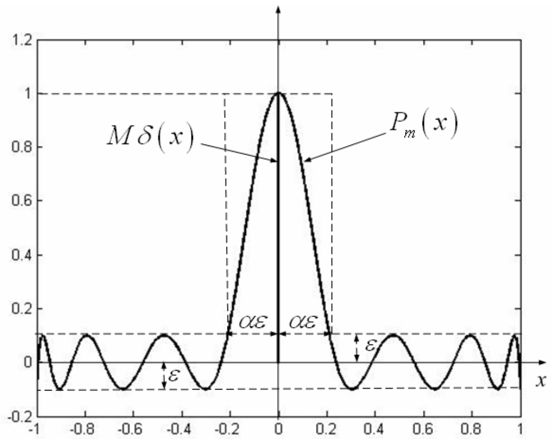
В настоящата работа са предложени нова тегловна функция, използваща хаусдорфово разстояние и нейното приложение при синтеза на FIR филтри.

Тегловна функция в хаусдорфова метрика

Тегловната функция се получава при апроксимация на делта функция от вида

(5) $$\delta(x) = \begin{cases} [0, M] & x = 0 \\ 0 & x \neq 0 \end{cases} ,$$

с алгебричен полином, осъществяващ най-добро приближение в хаусдорфова метрика в интервала [-1, 1] [1]. На Фиг.1 е показана ε околността относно хаусдорфовото разстояние на функцията $M\delta(x)$ при $M = 1$.



Фиг.1. Апроксимация на делта функция с хаусдорфов полином

Доказано е [1], че полиномът

$$P_m(x)=\varepsilon T_m\left(\frac{2x^2-1-\alpha^2\varepsilon^2}{1-\alpha^2\varepsilon^2}\right) \tag{6}$$

представлява единствено и най-добро приближение на делта функция в хаусдорфова метрика. В него с ε е означено хаусдорфовото разстояние; T_n е полином на Чебишев от първи род и степен m; α е параметър, а факторът (произведението) $\alpha\varepsilon$ определя широчината на функцията в областта на главния максимум на нивото на ε. Връзките между параметрите на полинома се определят от равенството [4]:

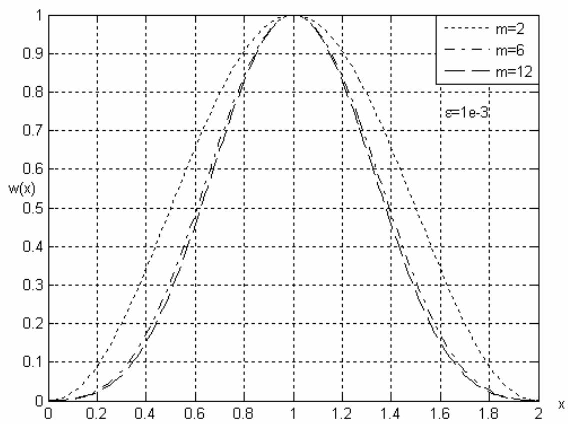
$$\alpha\varepsilon=\sqrt{\frac{\cosh\left[\frac{1}{m}\operatorname{arg}\cosh\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)\right]-1}{\cosh\left[\frac{1}{m}\operatorname{arg}\cosh\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)\right]+1}}. \tag{7}$$

Тегловната функция се получава, като хаусдорфовият полином се транслира в положителна посока със стойност единица, дефиниционната област се редуцира само до областта на главния максимум, т.е. в интервала $[1-\alpha\varepsilon,1+\alpha\varepsilon]$, и се повдигне на степен 1.27

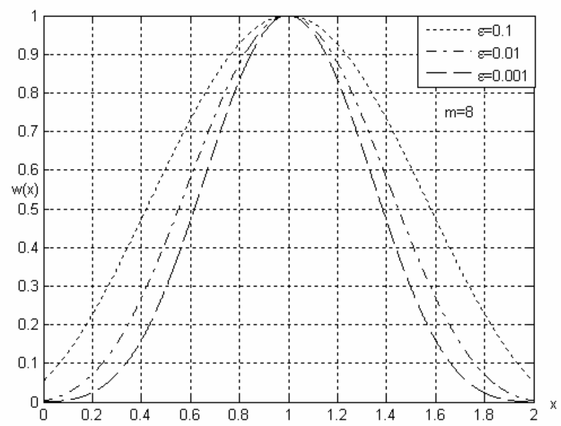
$$w_m(x)=\left\{\varepsilon T_m\left[\frac{2(\alpha\varepsilon x-\alpha\varepsilon)^2-1-\alpha^2\varepsilon^2}{1-\alpha^2\varepsilon^2}\right]\right\}^{1.27}= \tag{8}$$

$$=\left\{\varepsilon\cos\left[m\arccos\left|\frac{2(\alpha\varepsilon x-\alpha\varepsilon)^2-1-\alpha^2\varepsilon^2}{1-\alpha^2\varepsilon^2}\right|\right]\right\}^{1.27}.$$

На Фиг.2 и Фиг.3 са показани хаусдорфови тегловни функции, в зависимост от стойностите на степента на полинома m и хаусдорфовото разстояние ε.



Фиг.2. Хаусдорфови тегловни функции, в зависимост от степента на полинома m



Фиг.3. Хаусдорфови тегловни функции, в зависимост от хаусдорфовото разстояние ε

От фигурите може да се направи заключение, че m и ε променят ширината на главния максимум на функцията и могат да бъдат използвани като параметри при синтеза на FIR филтър.

Синтез на FIR филтър с хаусдорфова тегловна функция

Както бе споменато в началото, синтезът се състои в апроксимация на идеален нискочестотен филтър. Ако се приложи дискретното преобразованието на Фурие към идеалната амплитудно честотна характеристика (АЧХ), се поучава идеална импулсна характеристика от вида $\sin(x)/x$. За да бъде реализуема, функцията се умножава с подходяща тегловна функция (1.4) (прозорец) и се транслира в положителна посока с половината от интервала на дефиниционната област на прозореца. Полученото произведение е реалната импулсна характеристика на филтъра.

Ако на входа на цифров филтър от $N+1$ звена се подаде поредица от импулси, то изходната реакция, в съответствие с импулсната характеристика на филтъра, представлява сумата

(9) $$y(n)=h(1)x(n)+h(2)x(n-1)+h(3)x(n-2)+\cdots+h(N+1)x(n-N)$$

където $n=[0,N]$.

Равенство (9), изразено чрез комплексната променлива z [2], представлява импулсната характеристика на реалния филтър и има вида

(10) $$H(z)=h(1)z^{-N}+h(2)z^{-N-1}+h(3)z^{-N-2}+\cdots+h(N+1)z^{0}.$$

Комплексната променлива $z=re^{j\omega}$се представя с модула си r и ъгъла ω. Ако се приеме $r=1$, то функцията $H(z)$ ще описва около единична окръжност честотна характеристика $H(j\omega)$. Като се има предвид това, АЧХ на реалния филтър се получава след субституцията $e^{j\omega}=z$ в равенство (10)

(11) $$H(j\omega)=h(1)e^{-j0\omega}+h(2)e^{-j1\omega}+h(3)e^{-j2\omega}+\cdots+h(N+1)e^{-jN\omega},$$

където $h(1),h(2),\ldots,h(N+1)$ са коефициентите на филтъра. Редът на филтъра е N, а броят на звената, реализиращи схемно филтъра, е равен на броя на коефициентите му $N+1$.

При определяне на връзките между параметрите на филтъра е подходящо да се използва зависимостта, определяща същите при филтрите на Кайзер

(12) $$N = \operatorname{int}\left(1 + \frac{a - 7.95}{14.36\Delta f}\right),$$

където

(13) $$\Delta f = \frac{f_a}{f_s} - \frac{f_c}{f_s}$$

представлява разликата между нормираните спрямо честотата на дискретизация f_s честотата на задържане f_a и граничната честота f_c. С a е означено затихването в лентата на задържане в децибели. Хаусдорфовото разстояние се определя от зависимостите:

При $a < 24\mathrm{dB}$

(14) $$\varepsilon = 1.$$

При $24\mathrm{dB} \le a \le 50\mathrm{dB}$

(15) $$\varepsilon = \frac{0.66}{\left(2.7\times10^{-5}a^2 - 8\times10^{-4}a + 1.073\right)^{a-25}}.$$

При $50\mathrm{dB} < a \le 130\mathrm{dB}$

(16) $$\varepsilon = \frac{0.66}{1.1035^{a-25}}.$$

При $a > 130\mathrm{dB}$

(17) $$\varepsilon = \frac{0.66}{\left(0.0001a + 1.09\right)^{a-25}}.$$

Целесъобразно е степента на хаусдорфовия полином m да се приравни на N, тогава от равенство (7) може да се определи факторът $\alpha\varepsilon$.

Описаната методика ще бъде илюстрирана с **<u>числов пример</u>:**

Да се изчислят коефициентите на цифров FIR филтър с гранична честота $f_c = 1\mathrm{Hz}$, честота на задържане $f_a = 2\mathrm{Hz}$, затихване в лентата на задържане $a = 25\mathrm{dB}$, при честота на дискретизация $f_s = 10\mathrm{Hz}$.

От (13) се определя $\Delta f = 0.1$, а от (12)

(18) $$N = \operatorname{int}\left(1 + \frac{25 - 7.95}{14.36\times0.1}\right) = 13 = m.$$

Хаусдорфовото разстояние се намира от (16)

(19) $$\varepsilon = \frac{0.66}{\left(2.7\times10^{-5}\times25^2 - 8\times10^{-4}\times25 + 1.073\right)^{25-25}} = 0.66,$$

тогава от (7) се определя факторът $\alpha\varepsilon$

(20) $$\alpha\varepsilon = \sqrt{\frac{\cosh\left[\frac{1}{13}\arg\cosh\left(\frac{1}{0.66}\right)\right] - 1}{\cosh\left[\frac{1}{13}\arg\cosh\left(\frac{1}{0.66}\right)\right] + 1}} = 0.0375.$$

Импулсната характеристика на филтъра се получава от произведението на функцията $\sin(x)/x$ с хаусдорфовата тегловна функция (8)

$$(21)\; h(n+1)=\frac{\sin\left[2\pi\frac{f_c}{f_s}\left(n-\frac{N}{2}\right)\right]}{\pi\left(n-\frac{N}{2}\right)}\left\{\varepsilon\cos\left[m\,\mathrm{arccos}\left|\frac{2\left(\alpha\varepsilon\frac{2n}{N}-\alpha\varepsilon\right)^2-1-\alpha^2\varepsilon^2}{1-\alpha^2\varepsilon^2}\right|\right]\right\}^{1.27}$$

за стойност на аргумента $n=0,1,2,\ldots,N$. Получените стойности са коефициентите на филтъра по степените на z^{-n}

(22) $$h(z)=\text{-}0.0234z^{-13}-0.0124z^{-12}+0.0173z^{-11}+0.064z^{-10}+$$
$$+0.1187z^{-9}+0.1675z^{-8}+0.1962z^{-7}+0.1962z^{-6}+0.1675z^{-5}+$$
$$+0.1187z^{-4}+0.064z^{-3}+0.0173z^{-2}-0.0124z^{-1}\text{-}0.0234.$$

Предавателната функция на филтъра се получава в съответствие с (11)

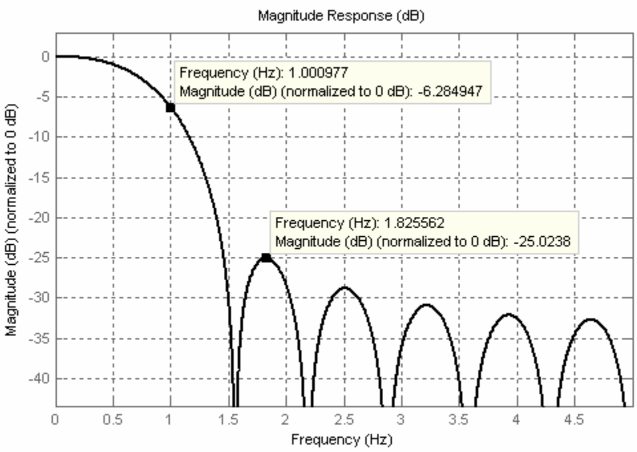
(23) $$H(j\omega)=\text{-}0.0234e^{-j0\omega}-0.0124e^{-j1\omega}+0.0173e^{-j2\omega}+0.064e^{-j3\omega}+$$
$$+0.1187e^{-j4\omega}+0.1675e^{-j5\omega}+\cdots-0.0124e^{-j12\omega}\text{-}0.0234e^{-j13\omega}.$$

kydeto $\omega=2\pi f/f_s$; $\left(f=0\div f_s/2\right)$.

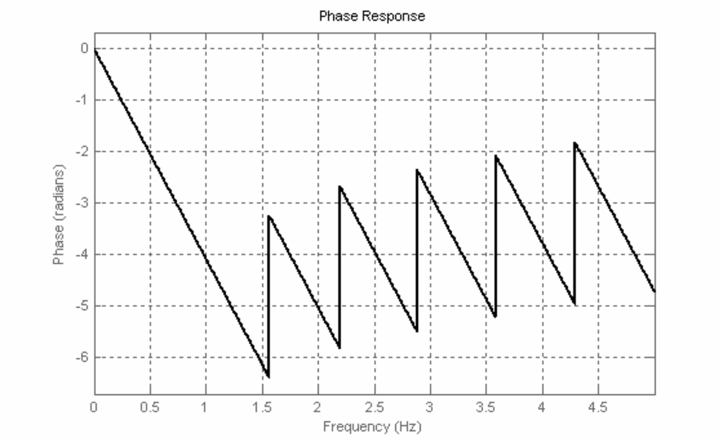
Модулът на предавателната функция е амплитудно честотната характеристика на филтъра, а аргументът й – фазово честотната. В някои случаи е необходимо модулът да се нормира спрямо ниво 0dB, като се раздели на сумата от коефициентите $h(n+1)$

(24) $$H^*(\omega)=\frac{\left|H(j\omega)\right|}{\sum_{n=0}^{N}h(n+1)}.$$

На Фиг.4 и Фиг.5 са показани честотните характеристики на филтъра.



Фиг.4. Нормирана АЧХ на филтъра

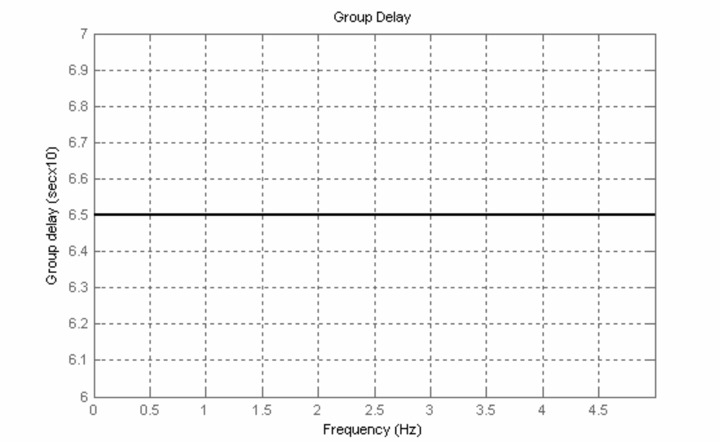


Фиг.5. ФЧХ на филтъра

От Фиг.5 се вижда, че филтърът има линейна фазово честотна характеристика. Това се дължи на симетричността на импулсната му характеристика, което личи от коефициентите в равенство (22).

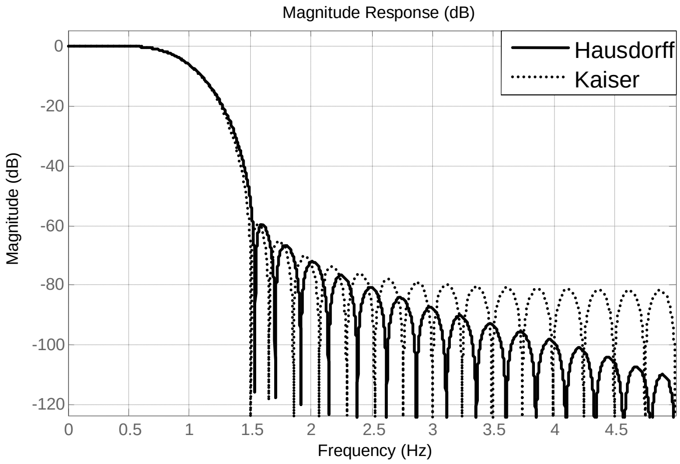
Груповото време на закъснение (ГВЗ) на филтъра е производната на фазово честотната характеристика. Тъй като тя е линейна, ГВЗ ще бъде константа. Стойността му се определя от равенството

(25) $$\tau = \frac{N}{2f_s} = \frac{13}{2\times 10} = 0.65\sec$$



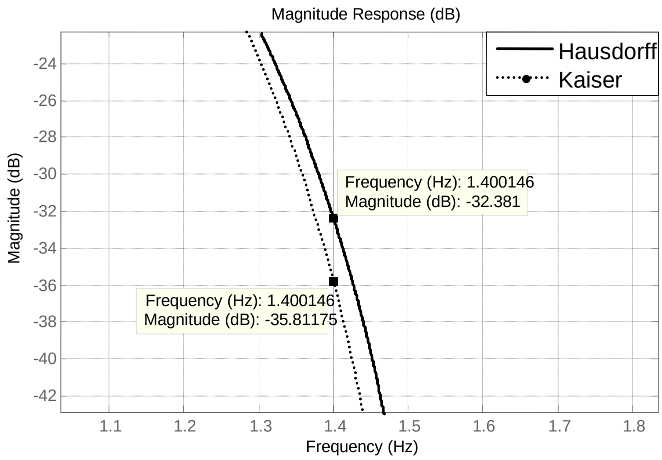
Фиг.6. Групово време на закъснение

На Фиг. 7 са сравнени амплитудно честотни характеристики на филтри с хаусдорфова тегловна функция и с тегловна функция на Кайзер, с еднакви входни данни: гранична честота 1Hz; честота на задържане 2Hz; честота на дискретизация 10Hz; ред на филтъра $N = 37$ и затихване в лентата на задържане 60dB.



Фиг.7. Сравнение на АЧХ

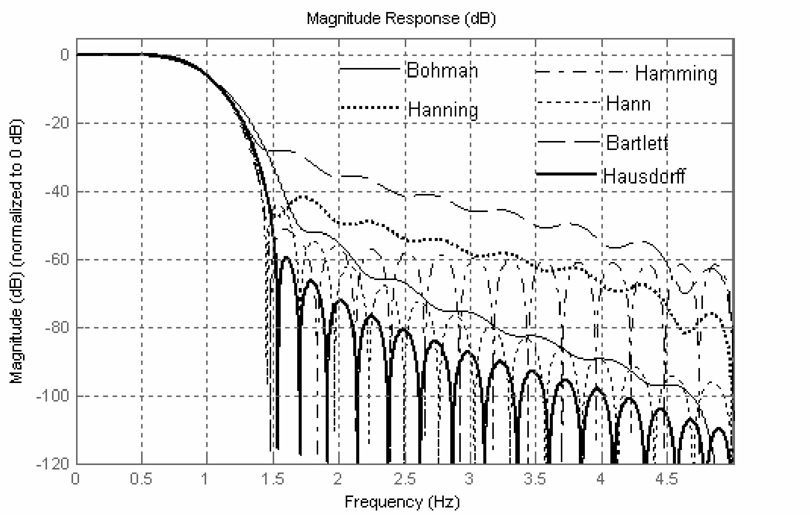
Сравнението показва, че с хаусдорфова тегловна функция се получават филтри, при които затихването в лентата на задържане нараства по-бързо, отколкото при филтрите на Кайзер. В дадения случай за честотната лента 4-4.5Hz то е от порядъка на 20-25dB. Това предимство се дължи на по-малката стръмност на АЧХ в участъка между граничната честота и тази на задържане. В конкретния случай за честота 1.4Hz разликата е около 3.7dB, което е илюстрирано на Фиг.8.



Фиг.8. Сравнение на АЧХ - фрагмент

Изводи

В настоящата работа е предложена нова тегловна функция, използваща хаусдорфова метрика. Тя се прилага за първи път при синтез на цифрови FIR филтри. Получените характеристики са подобни на филтрите на Кайзер. Амплитудно честотните характеристики са с по-малка стръмност в участъка между граничната честота и честотата на задържане. Този факт определя по-голямото затихване в лентата на задържане. Хаусдорфовите FIR филтри притежават всички предимства и недостатъци на този род филтри. Те се изчисляват по-лесно от цифровите филтри с безкрайни импулсни характеристики; винаги са реализуеми, имат линейни фазово честотни характеристики.



Фиг.9. Сравнение на АЧХ

Основни недостатъци са по-малката селективност и невъзможността да се получи точно амплитудно честотната характеристика.

Цифровите FIR филтри, получени с хаусдорфова тегловна функция не отстъпват по качества, дори превъзхождат голяма част филтрите от този род, което с вижда от Фиг.9. Те допълват многообразието им и могат да бъдат прилагани в практиката.

ЛИТЕРАТУРА

[1] СТОЯНОВ, Г., И. УЗУНОВ, Л. РАЙКОВСКА И Р. БРАДВАРОВ. Анализ, синтез и проектиране на електрически филтри с персонални компютри. С., Техника. 1991.

[2] ИВАНОВ Р. Цифрова обработка на едномерни сигнали. Габрово, АМI, 1999.

[3] ГАЧЕВ, М. Синтез на антенни решетки с оптимална диаграма на насоченост. Дисертация, С., Технически университет, 1981.

[4] HAMMING, R. W. Digital filters. NY, Prentice Hall, 1998.

[5] SENDOV, B. Hausdorff approximations. Kluwer Academic Publishers London 1990, ISBN: 0792309014