Механика Транспорт Комуникации

ISSN 1312-3823 (print)
ISSN 2367-6620 (online)
том 13, брой 3/2, 2015 г.

Научно списание http://www.mtc-aj.com **статия № 1217**

ПРИБЛИЖАВАНЕ НА ФУНКЦИ С ОПЕРАТОРА НА МАЙЕР-КЬОНИГ И ЦЕЛЕР

Иван Гаджев
gadjevivan@hotmail.com

ВТУ „Тодор Каблешков"- София 1574, ул. "Гео Милев" № 158 БЪЛГАРИЯ

Ключови думи: *Майер-Кьониг и Целер, Баскаков, К-функционал.*

Анотация: *В статията се характеризира грешката на приближение на функции с оператора на Майер-Кьониг и Целер при тегло* $\boldsymbol{w=(1-x)^{-1}}$. *Като се използва тясната връзка между операторите на Майер-Кьониг и Целер от една страна, и на оператора на Баскаков от друга, се доказва, че грешката на приближение е еквивалентна на тегловия К-функционал, а следователно, и на съответния модул на гладкост на Дициян и Тотик.*

Апроксимирането на функции с линейни положителни оператори е обширна тема. Тук ще разгледаме приближаването на функции в интервала [0,1) чрез класическия вариант на оператора на Майер-Кьониг и Целер при тегло $w=(1-x)^{-1}$ в равномерната норма. Ще дадем точната оценка на грешката на приближение чрез този оператор. За целта ще използваме тясната връзка между оператора на Майер-Кьониг и Целер от една страна и оператора на Баскаков от друга. Ще отбележим, че тази връзка за първи път е използвана от Тотик в [4], а по-късно и от други автори – виж, например, [5].

Но преди да формулираме основната теорема, ще дадем някои дефиниции.

Операторът на Майер-Кьониг и Целер се дефинира за функции в интервала [0,1) чрез формулата (виж [2])

$$\mathrm{M}_n(f,x)=M_nf(x)=\sum_{k=0}^{\infty} f\left(\frac{k}{n+k}\right)M_{n,k}(x),$$

където $M_{n,k}(x)$ са базисните полиноми на Майер-Кьониг и Целер

$$M_{n,k}(x)=\binom{n+k}{k}x^k(1-x)^{n+1}.$$

Операторът на Баскаков се дефинира за функции в интервала $[0,\infty)$ чрез формулата (виж [1])

$$V_n(f,x)=V_nf(x)=\sum_{k=0}^{\infty} f\left(\frac{k}{n}\right)V_{n,k}(x),$$

където $V_{n,k}(x)$ са базисните "полиноми" на Баскаков

$$V_{n,k}(x)=\binom{n+k-1}{k}x^k(1+x)^{-n-k}.$$

Ще оценяваме грешката на приближение в равномерната норма

$$\| f \| = \max_{x \in I} f(x),$$
където Iе интервала $[0,1)$ или $[0, \infty)$.

Но тъй-като, за интервала $[0,1)$, ще разглеждаме приближаването на функции при тегло $w = (1-x)^{-1}$, то ще въведем и следното означение

$$\| f \|_w = \| wf \|.$$

Операторът на диференциране ще означаваме с D, т.е. $D = \frac{d}{dx}$. Така,

$$Dg(x) = g'(x) \text{ и } D^2 g(x) = g''(x).$$

Теглото, което е естествено свързано с втората производна на съответния апроксимационен оператор, ще означаваме: за оператора на Майер-Кьониг и Целер – с $\varphi(x) = x(1-x)^2$, а за оператора на Баскаков – с $\psi(x) = x(1+x)$.

Дефинираме и следните пространства:

$C(I), L_\infty(I), CB(I), W^2(w\varphi)[0,1), W^3(w\varphi)[0,1), W^2(\psi)[0,\infty), W^3(\psi)[0,\infty)$.

$C(I)$ - пространството на всички непрекъснати в I функции,

$L_\infty(I)$ - пространството на всички Лебегово измерими и съществено ограничени в I функции,

$CB(I)$- пространството на всички непрекъснати и ограничени в I функции,

$CB(w)[0,1) = \{g: g \in C[0,1) \text{ и } wg \in L_\infty[0,1)\}$,

$W^2(w)[0,1) = \{g: Dg \in AC_{loc}(0,1) \text{ и } w\varphi D^2 g \in L_\infty[0,1)\}$,

$W^3(w)[0,1) = \{g: D^2 g \in AC_{loc}(0,1) \text{ и } w\varphi^{3/2}\varphi D^3 g \in L_\infty[0,1)\}$,

$W^2(\psi)[0,\infty) = \{g: Dg \in AC_{loc}(0,\infty) \text{ и } \psi D^2 g \in L_\infty[0,\infty)\}$,

$W^3(\psi)[0,\infty) = \{g: D^2 g \in AC_{loc}(0,\infty) \text{ и } \psi^{3/2} D^3 g \in L_\infty[0,\infty)\}$.

Тук с $AC_{loc}(I)$ е означено пространството на всички функции, които са абсолютно непрекъснати в $[a,b]$ за всеки интервал $[a,b]$ от вътрешността на I.

Ще ни трябват и следните К-функционали:

за приближаване с оператора на Баскаков

$$K_\psi(f,t^2) = \inf_g\{\| f-g \| + t^2 \| \psi D^2 g \| : g \in W^2(\psi)[0,\infty), f-g \in CB[0,\infty)\},$$

и за приближаване с оператора на Майер-Кьониг и Целер

$$K_w^\varphi(f,t^2) = \inf_g\{\| w(f-g) \| + t^2 \| w\psi D^2 g \| : g \in W^2(w\varphi)[0,1), f-g \in CB(w)[0,1)\}.$$

Известно е, че редицата $\mathrm{M}_n(f,x)$ клони поточково към функцията $f(x)$, т.е.

$$\lim_{n\to\infty} \mathrm{M}_n(f,x) = f(x).$$

Ще дадем точна оценка на грешката на приближение на функции с операторите на Майер-Кьониг и Целер при тегло $w = (1-x)^{-1}$, т.е. ще оценим $\| w(f - M_n f) \|$.

<u>Теорема.</u>

Съществува абсолютна константа L такава, че за всяка функция

$$f \in CB(w)[0,1) + W^2(w\varphi)[0,1)$$

е в сила еквивалентността

$$\| w(f - M_n f) \| \approx K_w^\varphi\left(f, \frac{1}{n}\right).$$

<u>Доказателство.</u>

Нека да направим субституцията $z = \frac{x}{1-x}$ (използувана за първи път от Тотик [4]) в оператора на Майер-Кьониг и Целер. Ясно е, че тъй-като $x \in [0,1)$, то $z \in [0,\infty)$. Получаваме

$$M_n(f,x) = \sum_{k=0}^{\infty} f\left(\frac{k}{n+k}\right)\binom{n+k}{k}\frac{z^k}{(1+z)^{n+k+1}} =$$

$$= \frac{1}{1+z}\sum_{k=0}^{\infty}(1+k/n) f\left(\frac{k/n}{1+k/n}\right)\binom{n+k-1}{k}\frac{z^k}{(1+z)^{n+k}}.$$

Сега дефинираме нова функция $g(z)$ чрез формулата

$$g(z) = (1+z)f\left(\frac{z}{1+z}\right).$$

Тогава операторът на Майер-Кьониг и Целер $\mathrm{M}_n(f,x)$ може да се запише във вида

$$M_n(f,x) = \frac{1}{1+z}\sum_{k=0}^{\infty} g\left(\frac{k}{n}\right)\binom{n+k-1}{k}\frac{z^k}{(1+z)^{n+k}} = \frac{1}{1+z}V_n(g,z).$$

Лесно се вижда също така, че $x = \frac{z}{1+z}$ и $1+z = \frac{1}{1-x}$. Тогава за тегловата грешка $[w(f-M_nf)](x)$ в точката x получаваме

$$[w(f-M_nf)](x) = (1-x)^{-1}\mathrm{f(x)} - (1-x)^{-1}M_nf(x) = g(z) - V_n(g,z).$$

Вземайки инфимум по всички $x \in [0,1)$ получаваме и следното равенство на нормите

$$\| w(f-M_nf) \| = \| g - V_ng \|.$$

Сега използуваме, че нормата на грешката при приближаване с оператора на Баскаков е еквивалентна на К-функционала $K_\psi(f,t^2)$ (виж Теорема 1.1 в [3]), т.е.

$$\| g - V_ng \| \approx K_\psi\left(g,\frac{1}{n}\right).$$

Но лесно се проверява, че

$$K_\psi\left(g,\frac{1}{n}\right) = K_w^\varphi\left(f,\frac{1}{n}\right).$$

С това теоремата е доказана.

Ще добавим, че К-функционалите, по принцип, се оценяват по-трудно от съответните модули на гладкост. А за използувания по-горе К-функционал $K_w^\varphi(f,t^2)$, в общия случай, не са ни известни модули на гладкост, еквивалентни на него. Но за разгледания случай на тегло $w = (1-x)^{-1}$, може да се използува съответния модул на гладкост на Дициян-Тотик $\omega_\psi^2(\mathrm{g,t})$ (виж [6]).

ЛИТЕРАТУРА:

[1] Baskakov V. A. An instance of a sequence of the linear positive operators in the space of continuous functions. Docl. Akad. Nauk SSSR, 113:249_251.

[2] W. Meyer-K_onig and K. Zeller. Bernsteinsche Potenzreihen. Studia Math., 19:89_94.

[3] I. Gadjev. Strong converse result for Baskakov operator. Serdica Math. Journal, 40:273_318.

[4] V. Totik. Uniform aproximation by Baskakov and Meyer-K_onig and Zeller-type operators. Period. Math. Hungar, 14(3-4):209_ 228, 1983.

[5] K. G. Ivanov and P. E. Parvanov. Weighted approximation by Meyer-K_onig and Zeller-Type operators. Proceedings Volume of CTF-2010, Sozopol, Bulgaria (dedicated to the memory of Borislav Bojanov)., pages 150_160, 2011

[6] Z. Ditzian and V. Totik. Moduli of Smoothness. Springer, Berlin, New York, 1987.

WEIGHTED APPROXIMATION OF FUNCTIONS BY MEYER - KONIG AND ZELLER OPERATORS

Ivan Gadjev
gadjevivan@hotmail.com

Todor Kableshkov University of Transport, Sofia, 158 Geo Milev Str. BULGARIA

Key words: *Meyer-König and Zeller, Baskakov, K-functional.*

Abstract:*In this article we characterize the weighted error of approximation of functions by Meyer-König and Zeller operators with weight* $\boldsymbol{w = (1-x)^{-1}}$. *Using the closed connection between the operators of Meyer-König and Zeller and the operator of Baskakov, we prove that the weighted error of approximation by Meyer-König and Zeller operators with weight* $\boldsymbol{w = (1-x)^{-1}}$, *is equivalent to the weighted K-functional, consequently, to the appropriate modulus of smoothness of Ditzian and Totik.*