



МНОГОКРИТЕРИАЛЕН ПОДХОД ЗА РЕШАВАНЕ НА ЗАДАЧИ ОТ ТРАНСПОРТЕН ТИП, ОСНОВАВАЩ СЕ НА РАЗМИТИ ОЦЕНКИ

Мартин Иванов¹, Димитър Димитров²
mivanov@nbu.bg, ddimitrov@vtu.bg

¹Нов български университет, ул. Монтевидео 21, гр. София

²ВТУ "Тодор Каблешков", ул. Гео Милев 158, гр. София
БЪЛГАРИЯ

***Ключови думи:** многокритериално оценяване, размит АНР-метод, лингвистични променливи, задачи от транспортен тип.*

***Резюме:** В доклада е разгледан подход за решаване на многокритериални задачи от транспортен тип с обобщен критерий за ефективност. Обобщеният критерий изразява частните оптимизационни критерии чрез тегла, които са получени като размити оценки на тяхното взаимно доминиране. Подходът е илюстриран върху класическа транспортна задача на линейното програмиране.*

ВЪВЪЕДЕНИЕ

В настоящата работа се представя един подход за решаване на многокритериални задачи от транспортен тип, базиращ се на използване на обобщени тегла на критериите, получени със средствата на вербалното оценяване на тяхната взаимна значимост и представянето на оценките като размити стойности. Използването на средствата на размитата логика и размитата аритметика е насочено към построяването на формални модели, отчитайки наличието на неопределеност, несигурност или просто на недостатъчна прецизност на участващите в тях параметри. В много случаи прилагането на тази техника позволява и да се минимизира влиянието на случайни грешки или шум при фактическото оценяване на критериите за ефективност. Приложимостта на размитите оценки в задачите от транспортен тип е предмет на множество съвременни изследвания и на растящ интерес, без нито едно от тях да има претенции за окончателна завършеност ([1],[2] и др.) В най-общия си вид тези изследвания предполагат представянето на всички или на част от числовите характеристики на задачата като размити стойности, но не включват възможното наличие на няколко критерия в крайната оценка за ефективността на решението.

Предложеният подход е предназначен да представи средство за преодоляване на проблемите, свързани със задаване на относителните тегла при прилагането на няколко различни критерия в случаите на намиране на целесъобразно решение на задачи от транспортен тип. С оглед опростяването на настоящето изложение и при запазване на степента на общност, предложеният многокритериален подход ще бъде илюстриран при решаването на класическата транспортна задача на линейното програмиране, без това да ограничава обхвата на неговата приложимост. Следва да се отбележи, че тук няма да бъдат дефинирани основни понятия от областта на многокритериалната

оптимизация, размитата логика и изчисленията с размити числа. Същите са достатъчно подробно и популярно обяснени в множество издания ([3],[4],[5] и др.), поради което краткият текст на този материал няма да бъде обременяван с известни дефиниции и факти.

ПОСТАНОВКА НА ЗАДАЧАТА И ОПИСАНИЕ НА ПОДХОДА

Изходната формулировка на транспортната задача е достатъчно популярна и тук формалната ѝ страна и технологичната ѝ интерпретация няма да бъдат припомняни:

$$Z^*(X) = \min \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n c_{ij} \cdot x_{ij}, \quad (1)$$

при ограничения върху дефиниционната област D :

$$D: \begin{cases} \sum_{j=1}^n x_{ij} = s_i, i = 1, \dots, m \\ \sum_{i=1}^m x_{ij} = d_j, j = 1, \dots, n \\ x_{ij} \geq 0, \forall i, j. \end{cases} \quad (2)$$

Практически интерес има решаването на тази задача при наличието на множество несъгласувани (дори противоречиви) помежду си критерии, изразяващи различни технологични или икономически връзки и изисквания. В случая на многокритериално представяне на задачата като оптимизационна са възможни две основни нейни форми:

- Решаване на задачата въз основа на генерализиран критерий за ефективност, отчитащ участието на всеки от частните критерии с оценка на неговата значимост за крайното решение.
- Построяване на съвкупност от недоминирани решения на частните оптимизационни задачи по всеки от критериите – т.е. съставяне на т.нар. фронт на Парето.

В настоящата работа вниманието ще бъде насочено към първата форма на представяне на многокритериалната страна на задачата, т.е. решението ѝ ще се търси при участието на l на брой критерии за ефективност $Z_k(X)$, $k=1, \dots, l$, формиращи стойността на обобщения критерий $Z_G(X)$ в следния вид:

$$\begin{aligned} Z_G(X) &= \sum_{k=1}^l w_k \cdot Z_k(X) = \sum_{k=1}^l w_k \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n c_{ij}^{(k)} \cdot x_{ij} = \sum_{k=1}^l \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n w_k \cdot c_{ij}^{(k)} \cdot x_{ij} = \\ &= \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n \left(\sum_{k=1}^l w_k \cdot c_{ij}^{(k)} \right) \cdot x_{ij} = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n c_{ij}^{(G)} \cdot x_{ij}. \end{aligned} \quad (3)$$

Очевидно от елементарните преобразования (3) е, че по същество оценката на генерализирания критерий $Z_G(X)$ е свързана с изчисляването на генерализираните стойности $c_{ij}^{(G)}$, получени като претеглени стойности на коефициентите c_{ij} по различните критерии със съответните тегла на критериите w_k .

Изборът на стойностите на теглата w_k на практика е нееднозначен. Не са налице нито формални, нито неформални правила за установяване на техните стойности и в обичайния случай те изразяват предпочитанията на лицето, вземащо решение, като

определянето на приоритетите им става по субективни процедури, отразяващи неговия личен опит и професионална компетентност. Предложеният метод цели в известна степен да смекчи субективния елемент в съставянето на задачата и да обоснове формално избора на стойностите на теглата w_k .

Подходът включва няколко стъпки:

- Сравняване на критериите два по два и изразяване на сравнителната оценка вербално в петстепенна скала;
- Представяне на вербалните оценки (наречени „лингвистични променливи“) в размити стойности съгласно скалата на Саати (*Thomas Saaty*) за приложение на АНР-метода;
- Съставяне на „размитата“ матрица на АНР-съдържаща сравнителните оценки на значимостта на критериите;
- Изчисляване на собствения вектор на АНР-матрицата (като „размити стойности“);
- Преобразуване на размитите елементи на собствения вектор в конкретни реални числа („дефъзификация“);
- Нормиране на резултата и изчисляване на относителните тегла на критериите;
- Заместване на относителните тегла на критериите в целевата функция;
- Намиране на решението на задачата по класически метод.

ОПИСАНИЕ НА ПРОЦЕДУРАТА

Процедурата за приложение на подход се изпълнява в следния ред:

1. Представянето на взаимната тежест на критериите два по два се изразява най-удобно чрез предефинирано множество от вербални оценки (т.нар. „лингвистични променливи“), които са ранжирани според степента на доминирането на критериите един спрямо друг: „липса на доминиране“, „слабо доминиращ“, „силно доминиращ“, „много силно доминиращ“, „изключително доминиращ“. Вербалното изразяване на оценките е много по-естествено и разбираемо за лицата, вземащи решението и представлява съществено облекчение при изразяване на оценката за взаимното доминиране на критериите.
2. Употреба на размити оценки. За целите на построяването на формалния модел вербалните оценки се свързват със своите числови еквиваленти (конкретни или „размити“) съгласно класическата скала на Саати за прилагане на метода АНР. Скалата се състои от пет основни стойности, съответстващи на равностойността или на взаимното доминиране на критериите, използвани в оптимизационната задача. В класическия АНР-метод стойностите на скалата се представят като „конкретни“ числа (табл.1). „Размитият“ вариант на АНР-метода, който се използва в настоящето изследване, представя стойностите от скалата чрез размити триъгълни числа $\tilde{a} = (a^l, a^m, a^h)$ с функция на принадлежност $\mu_a(x)$ [3]:

$$\mu_a(x) = \begin{cases} 0 & x < a^l \\ \frac{x - a^l}{a^m - a^l} & a^l \leq x \leq a^m \\ \frac{a^h - x}{a^h - a^m} & a^m < x \leq a^h \\ 0 & x > a^h \end{cases}, \quad a^l \leq a^m \leq a^h, \quad (4)$$

Използваната скала, свързваща вербалните оценки с конкретните или с размитите оценки е показана в таблица 1.

Таблица 1

Вербална дефиниция	Конкретна стойност	Размита стойност: (a^l, a^m, a^h)
Липса на доминиране (ЛД)	1	(1,1,2)
Слабо доминиращ (СЛД)	3	(2,3,4)
Силно доминиращ (СНД)	5	(4,5,6)
Много силно доминиращ (МСД)	7	(6,7,8)
Изключително доминиращ (ИД)	9	(8,9,9)

3. Изчисляване на относителните тегла на критериите чрез размития вариант на метода АНР (Analytic Hierarchy Process). Методът е разработен от Томас Саати през 1970 година [4]. В основата му се съдържа идеята за определяне на относителните тегла на критериите чрез изчисляване на елементите на собствения вектор за най-голямата собствена стойност на матрицата на сравненията $A = \{a_{ij}\}_{i=1, \dots, l}^{j=1, \dots, l}$ (квадратна реципрочно-антисиметрична матрица с размерност $l \times l$), съдържаща оценките за взаимното доминиране на критериите съгласно ретстепенна скала. Размитият вариант на АНР-метода позволява изчисленията да бъдат извършени, когато елементите на матрицата A са представени не чрез конкретни числа a_{ij} , а чрез размити стойности \tilde{a}_{ij} . Всяко размито число се представя като триплет $\tilde{a}_{ij} = (a_{ij}^l, a_{ij}^m, a_{ij}^h)$ и има триъгълна функция на принадлежност от вида (4). В този случай се реализират предимствата на размития подход при оценяването. Резултатът от изпълнението на тази стъпка са размитите оценки на теглата $\tilde{w}_k, k = 1, \dots, l$, които впоследствие се използват за определяне на техните конкретни стойности.
4. Окончателното получаване на теглата на критериите $w_k, k = 1, \dots, l$ като конкретни („неразмити“) стойности се получава след още две стъпки: „дефъзификация“ (defuzzification), представляваща трансформирането на размитите стойности $\tilde{w}_k, k = 1, \dots, l$ в конкретните им числови еквиваленти w'_k и нормиране на така определените стойности. Трансформирането на размитите оценки на теглата $\tilde{w}_k, k = 1, \dots, l$ в конкретни става чрез най-популярния подход – определяне на „масовия“ център на размитото число [3].

Нормирането на получените по този начин конкретни стойности на оценките на теглата се прави с оглед да се спази нормировъчното условие:

$$\sum_{k=1}^l w_k = 1, \quad (5)$$

като връзката между ненормираните w'_k и нормираните w_k тегла е очевидна:

$$w_k = \frac{w'_k}{\sum_{k=1}^l w'_k}. \quad (6)$$

5. Окончателният вид на обобщения критерий за ефективност от (3) се получава въз основа на оценките w_k , изчислени в предишната стъпка.

ИЛЮСТРАТИВЕН ПРИМЕР

Описаният тук подход е илюстриран върху съвсем прост пример. Избрана е задача с ниска размерност, състояща се от 3 доставчика и 4 консуматора на еднороден

продукт. Оптимизационните критерии са три и условно са определени като „разстояние между началния и крайния пункт” – K_1 , „времетраене на операцията” – K_2 и „разходи на единица транспортиран продукт” – K_3 . Матриците, съответстващи на трите критерия C_1 , C_2 и C_3 са показани по-долу. Стойностите в матриците са условни и имат само илюстративно значение.

$$C_1 = \begin{Bmatrix} 10 & 4 & 7 & 16 \\ 25 & 9 & 11 & 12 \\ 4 & 17 & 21 & 11 \end{Bmatrix}, C_2 = \begin{Bmatrix} 25 & 8 & 18 & 15 \\ 31 & 12 & 16 & 22 \\ 11 & 5 & 17 & 17 \end{Bmatrix}, C_3 = \begin{Bmatrix} 19 & 11 & 24 & 14 \\ 7 & 12 & 5 & 18 \\ 21 & 11 & 9 & 24 \end{Bmatrix}.$$

Векторите на наличностите S и потребностите D са съответно:

$$S^T = (25,30,45), D^T = (20,15,35,30).$$

Матрицата A на взаимното доминиране на критериите, представена във вербална форма и чрез съответстващите размити оценки е представена в таблица 2:

Таблица 2

A	Вербални оценки			Размити оценки		
	K_1	K_2	K_3	K_1	K_2	K_3
K_1	ЛД	-	-	(1,1,2)	(0.25,0.333,0.5)	(0.125,0.1428,0.1667)
K_2	СЛД	ЛД	-	(2,3,4)	(1,1,2)	(0.1667,0.2,0.250)
K_3	МСД	СНД	ЛД	(6,7,8)	(4,5,6)	(1,1,2)

Въз основа на прилагането на размития АНР метод и посочената изчислителна процедура са определени размитите оценки за теглата на критериите. Заедно с тях в таблица 3 са посочени и стойностите на конкретните („неразмитите”) оценки на теглата, получени след прилагане на операцията „дефъзификация” по метода на „масовия център”. Същите са подложени на нормиране съгласно (5) (таблица 3):

Таблица 3

Размити оценки	Конкретни оценки	Нормирани оценки
$\tilde{w}_1 = (0.107, 0.109, 0.112)$	$w'_1 = 0.1102$	$w_1 = 0.0827$
$\tilde{w}_2 = (0.232, 0.248, 0.265)$	$w'_2 = 0.2603$	$w_2 = 0.1952$
$\tilde{w}_3 = (0.958, 0.963, 0.967)$	$w'_3 = 0.9627$	$w_3 = 0.7221$

Прилагането на получените тегла върху елементите на матриците на критериите C_1 , C_2 и C_3 дават стойностите в обобщената матрица C_G на многокритериалната задача:

$$C_G = w_1.C_1 + w_2.C_2 + w_3.C_3 = \begin{Bmatrix} 19.427 & 9.835 & 21.423 & 14.360 \\ 13.173 & 11.752 & 7.643 & 18.285 \\ 17.642 & 10.325 & 11.554 & 21.558 \end{Bmatrix} \quad (7)$$

Намирането на решението на многокритериалната задача X^* въз основа на генерализираните стойности на коефициентите $c_{ij}^{(G)}$ от матрицата C_G става по някой от

традиционните методи за решаване на задачата. Окончателното решение на многокритериалната задача е:

$$X^* = \begin{Bmatrix} 0 & 15 & 0 & 10 \\ 0 & 0 & 30 & 0 \\ 20 & 0 & 5 & 20 \end{Bmatrix}, \text{ Стойност на целевата функция: } Z^*(X) = 1362.185 .$$

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Предложеният метод позволява със сравнително лесни и достъпни средства да се преодолеят проблемите около съставянето на генерализиран оптимизационен критерий на задачи от транспортен тип, в частност – да се подберат обосновани стойности на степента на участие на частните критерии в обобщената критериална функция. Поради простотата си методът е осъществим и приложим в много случаи, в които процедурата на вземане на решение включва и експертно оценяване на степента на взаимната значимост на критериите и предпочитанията на отговорните за резултата от решението лица.

ЛИТЕРАТУРА:

- [1] Liu Shiang-Tai, Chiang Kao ,Solving fuzzy transportation problems based on extension principle, European Journal of Operational Research 153 (2004) 661–674.
- [2] Shugani Poonam¹, Abbas S. H.², Gupta V.K.,Fuzzy Transportation Problem of Triangular Numbers with α -Cut and Ranking Technique, IOSR Journal of Engineering May. 2012, Vol. 2(5) pp: 1162-1164.
- [3] Kasabov Nikola K., Foundations of Neural Networks, Fuzzy Systems, and Knowledge Engineering, A Bradford Book The MIT Press Cambridge, Massachusetts, London, England, Second printing, 1998.
- [4] Tufan Demirel, Nihan Çetin Demirel, Cengiz Kahraman , Fuzzy Analytic Hierarchy Process and its Application, Fuzzy Multi-Criteria Decision Making, Springer Optimization and Its Applications Volume 16, 2008, pp 53-83
- [5] Özdağoğlu Aşkın, Güzin Özdağoğlu, Comparison of AHP and fuzzy AHP for the Multicriteria Decision Making Processes with Linguistic Evaluations, İstanbul Ticaret Üniversitesi Fen Bilimleri Dergisi Yıl: 6 Sayı:11 Bahar 2007/1 s. 65-85.

MULTICRITERIA APPROACH FOR SOLVING TRANSPORTATION PROBLEMS BASED ON FUZZY ASSESSMENT

Martin Ivanov¹, Dimitar Dimitrov²
mivanov@nbu.bg, ddimitrov@vtu.bg

¹*New Bulgarian University, 21 Montevideo Str., Sofia,*
²*Todor Kableshkov University of Transport, 158 Geo Milev Str., Sofia,*
BULGARIA

Key words: multicriteria assessment, fuzzy AHP approach, linguistic variables, transportation problems.

Abstract: In the paper is considered approach to solving transport type multi-objective problems with generalized efficiency criterion. The generalized criterion is expressed by weights of local optimization criterias that were obtained as a fuzzy assessments of their mutual domination. The approach is illustrated on the classical transportation problem of the linear programming.