Механика
Транспорт
Комуникации
Научно списание

ISSN 1312-3823
том 12, брой 3/2, 2014 г.
статия № 1035
http://www.mtc-aj.com

ИЗСЛЕДВАНЕ НА УСТОЙЧИВОСТ НА СИНХРОНИЗАЦИЯ НА СВЪРЗАНИ ХАОТИЧНИ СИСТЕМИ

Галина Чернева
cherneva@vtu.bg

ВТУ "Тодор Каблешков", София, 1574, ул. "Гео Милев" 158,
БЪЛГАРИЯ

Ключови думи: *хаотични системи, фазово пространство, хаотичен атрактор, синхронизация*

Резюме: *Синхронизацията на свързани хаотични системи има фундаментално значение при приложението на хаотичните колебания в различни области на техниката: при предаване на управляващи въздействия, в системи за предаване на информация и др. Поради природата и особеностите на хаотичните процеси, обаче, пълното синхронизиране на две системи, дори и идентични, е трудно реализуемо.*

В настоящата работа е предложен критерий за устойчивост на синхронизация на свързани идентични хаотични системи. Приложението му е илюстрирано при синхронизиране на системи от трети ред.

1. Въведение в проблема

Хаотичната синхронизация е фундаментално явление в нелинейната динамика, което намира широко приложение в различни области – физика, химия, радиокомуникации. Възможността за синхронизация на две хаотични системи позволява приложението на хаотичните колебания при предаване на управляващи въздействия или информация.

Въпреки, че е обект на много изследвания, в литературата няма единен подход за определяне на това явление. Известно е, че терминът „хаотична синхронизация" определя няколко различни метода за синхронизиране на хаотичните системи: честотна, фазова, синхронизация със закъснение, обобщена, пълна синхронизация [1,2,3], които са свързани помежду си.

Съществен напредък в изследванията на хаотичната синхронизация бележат Pecora и Carroll [1,2], които доказват, че две хаотични системи могат да се синхронизират, като се въведе подходяща връзка между тях. Тяхно също така е твърдението, че ако една хаотична система се раздели на две подсистеми, свързани чрез общ сигнал, те могат да се самосинхронизират. Така става възможна синхронизацията между две свързани идентични хаотични системи, като динамиката на едната се приспособява и повтаря динамиката на другата система. За тях са въведени понятията „управляваща" (водеща) и „подчинена" (водена) система (master-slave) [2]. Тази идея на Pecora и Carroll позволява приложението на хаотичната синхронизация в радиокомуникационните системи, където водещата система се разполага в предавателя, а водената в приемника.

Когато е налице пълно съвпадение на векторите на състоянията на двете системи, се реализира пълна синхронизация. Тя обаче изисква висока степен на идентичност на хаотичните системи. Но дори и еднакви, тези хаотични системи реално не могат да стартират от едни и същи начални условия. Поради особеностите на хаотичното движение (силна зависимост от началните условия), колебанията на двете хаотични системи трудно могат да бъдат напълно еднакви. Това поставя въпросът за количествен анализ на хаотичната синхро-низация. Необходимо е да се подбере количествен критерий, чрез който да се оценява степента на синхронизация. Известни са [5] различни критерии за хаотична синхронизация, но те не отчитат нейната устойчивост.

В настоящата работа е предложен критерий за устойчивост на синхронизация на свързани идентични хаотични системи. Приложението му е илюстрирано при синхронизиране на системи от трети ред във вид на схеми на Чуа [4].

2. Условия за устойчивост на хаотичната синхронизация

Както е известно [5], една хаотична система се описва със система диференциални уравнения

(1) $$\frac{d\boldsymbol{x}}{dt} = f(\boldsymbol{x}),$$

където $\boldsymbol{x}$ е вектор на състоянието, принадлежащ в общ случай на $n-$ мерното пространство ($\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{R^n}$).

Нека структурата на системата да позволява тя да се представи като две подсистеми $\boldsymbol{y}$ и $\boldsymbol{z}$, такива, че

$\boldsymbol{y}$= ($y_1,\dots,y_m$) ; $\boldsymbol{z}$= ($z_{m+1},\dots,z_n$).

Тогава система (1) може да се представи като две системи уравнения:

(2) $$\frac{d\boldsymbol{y}}{dt} = u(\boldsymbol{y},\boldsymbol{z}) \ ,$$

(3) $$\frac{d\boldsymbol{z}}{dt} = v(\boldsymbol{y},\boldsymbol{z}) \ ,$$

където функциите се изразяват във вида:

$u=(f_1,\dots, f_m)$; $v=(f_{m+1},\dots, f_n)$.

Тогава векторът на отклонението на състоянията на системи (2) и (3) може да се изрази като:

(4) $$\begin{bmatrix} \delta\boldsymbol{y} \\ \delta\boldsymbol{z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{y}_1 \\ \boldsymbol{z}_1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \boldsymbol{y}_2 \\ \boldsymbol{z}_2 \end{bmatrix} \quad .$$

Като се изрази от (4) $\begin{bmatrix} \boldsymbol{y}_2 \\ \boldsymbol{z}_2 \end{bmatrix}$ и се замести в изходната система диференциални уравнения, се получава:

(5) $$\begin{bmatrix} \boldsymbol{y}_1 \\ \boldsymbol{z}_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u(\boldsymbol{y}_1,\boldsymbol{z}_1) \\ v(\boldsymbol{y}_1,\boldsymbol{z}_1) \end{bmatrix},$$

(6) $$\begin{bmatrix} \delta\boldsymbol{y} \\ \delta\boldsymbol{z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{y}_1 \\ \boldsymbol{z}_1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} u(\boldsymbol{y}_1 - \delta\boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}_1 - \delta\boldsymbol{z}) \\ v(\boldsymbol{y}_1 - \delta\boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}_1 - \delta\boldsymbol{z}) \end{bmatrix}.$$

Режимът на пълна синхронизация между двете системи съответства на нулево решение за $\begin{bmatrix} \delta\boldsymbol{y} \\ \delta\boldsymbol{z} \end{bmatrix}$, т.е.

(7) $$\begin{bmatrix} \delta\boldsymbol{y} \\ \delta\boldsymbol{z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u(\boldsymbol{y}_1, \boldsymbol{z}_1) \\ v(\boldsymbol{y}_1, \boldsymbol{z}_1) \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} u(\boldsymbol{y}_1 - \delta\boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}_1 - \delta\boldsymbol{z}) \\ v(\boldsymbol{y}_1 - \delta\boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}_1 - \delta\boldsymbol{z}) \end{bmatrix} = 0$$

Така анализът на устойчивост на режима на пълна синхронизация се свежда до анализ на устойчивост на решението на линеаризираната система

(8) $$\begin{bmatrix} \delta\boldsymbol{y} \\ \delta\boldsymbol{z} \end{bmatrix} = \boldsymbol{J}(\boldsymbol{y}_1, \boldsymbol{z}_1) \begin{bmatrix} \delta\boldsymbol{y} \\ \delta\boldsymbol{z} \end{bmatrix} \quad ,$$

където

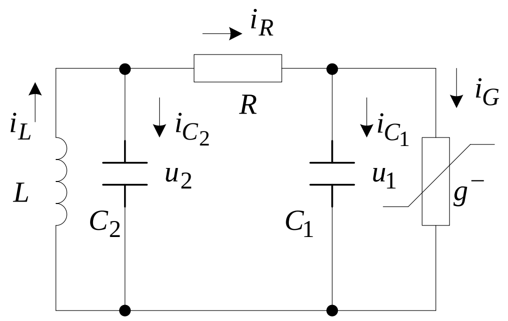
(9) $$\boldsymbol{J}(\boldsymbol{y}_1, \boldsymbol{z}_1) = \frac{\partial(u, v)}{\partial(\boldsymbol{y}_1, \boldsymbol{z}_1)}$$

е якобианът на функциите $u(\boldsymbol{y}_1, \boldsymbol{z}_1)$ и $v(\boldsymbol{y}_1, \boldsymbol{z}_1)$.

Известно е [6], че устойчивостта на решението на система (8) се определя от собствените стойности на матрицата $\boldsymbol{J}$ - λ_i. Ако техните реални части за всички точки от атрактора на водещата система са отрицателни, то решението на (8), а от там и режимът на синхронизация между двете системи, са устойчиви.

3. Устойчивост на синхронизация на свързани идентични хаотични системи от трети ред

Еин от най-типичните аналогови генератори на хаотични колебания е веригата на Chua (фиг.1), съдържащ нелинеен резистор с отрицателна проводимост и линейно-отсечкова V-A характеристика [4], фиг.2.



Фиг.1

За веригата от фиг.1 се записва следната система уравнения, съгласно законите на Кирхоф.

(10) $$\left| \begin{aligned} \frac{du_1}{dt} &= \frac{1}{RC_1}(u_2 - u_1) - \frac{g(u_1)}{C_1} \\ \frac{du_2}{dt} &= \frac{1}{RC_2}(u_1 - u_2) + \frac{i_L}{C_2} \\ \frac{di_L}{dt} &= -\frac{u_2}{L} \end{aligned} \right.$$

При разглеждане на две свързани идентични вериги на Чуа, система (10), се свежда до следната система уравнения:

$$
(11)\quad \begin{cases}
\dfrac{dx_1}{dt} = \dfrac{1}{RC_1}(x_2 - x_1) - \dfrac{f(x_1)}{C_1} \\
\dfrac{dx_2}{dt} = \dfrac{1}{RC_2}(x_1 - x_2) + \dfrac{x_3}{C_2} \\
\dfrac{dx_3}{dt} = -\dfrac{x_2}{L} \\
\dfrac{dy_1}{dt} = \dfrac{1}{\alpha\beta RC_1}(x_2 - y_1) - \dfrac{f(y_1)}{\beta C_1} \\
\dfrac{dy_2}{dt} = \dfrac{1}{\alpha\beta RC_2}(y_1 - y_2) + \dfrac{y_3}{\beta C_2} \\
\dfrac{dy_3}{dt} = -\dfrac{y_2}{\gamma L}
\end{cases},
$$

където

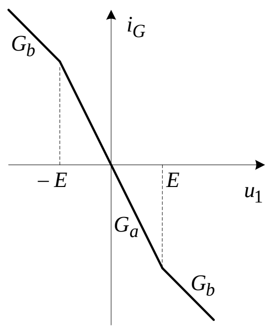
$\boldsymbol{x}(t) = (x_1, x_2, x_3)$, $u_1 = x_1$; $u_2 = x_2$; $i_L = x_3$

са вектори на състоянието за първата (управляващата) верига;

$\boldsymbol{y}(t) = (y_1, y_2, y_3)$, $u_1 = y_1$; $u_2 = y_2$; $i_L = y_3$

са вектори на състоянието на втората (управляваната) верига;

α, β, γ са относителните показатели на разстройката на параметрите на двете системи.



Фиг.2

Функцията $f(.)$ характеризира линейно-отсечкова V-A характеристика и е от вида:

$$f(x) = a_1 x + \frac{1}{2}(a_2 - a_1)(|x+1| - |x-1|),$$

където коефициентите a_1, a_2 зависят от стойностите на отрицателната проводимост на нелинейния резистор (фиг.2):

$a_1 = RG_b$, $a_2 = RG_a$

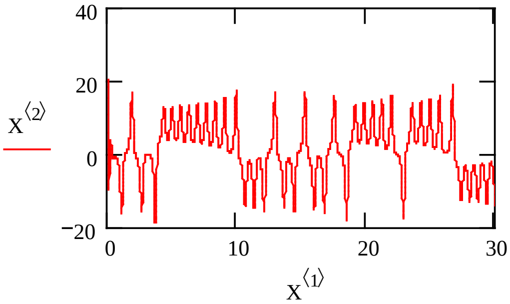
Връзката между управляващата и управляваната системи се осъществява по променливата x_2.

Определени са елементите на матрицата $\boldsymbol{J}$, които зависят само от параметрите на веригата, но поради линейно-отсечковия характер на характеристиката на нелинейния елемент, могат да бъдат два вида:

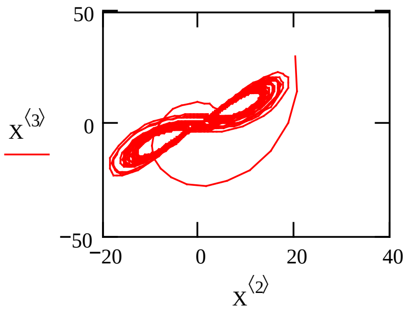
(12) $$J_1 = \begin{bmatrix} -\dfrac{1}{C_1}\left(\dfrac{1}{R}+a_1\right) & 0 & 0 \\ \dfrac{1}{RC_2} & -\dfrac{1}{RC_2} & \dfrac{1}{C_2} \\ 0 & -\dfrac{1}{L} & 0 \end{bmatrix};$$

(13) $$J_2 = \begin{bmatrix} -\dfrac{1}{C_1}\left(\dfrac{1}{R}+a_2\right) & 0 & 0 \\ \dfrac{1}{RC_2} & -\dfrac{1}{RC_2} & \dfrac{1}{C_2} \\ 0 & -\dfrac{1}{L} & 0 \end{bmatrix}.$$

За базови стойности на параметрите на веригата от фиг.1 са използвани [6]: L= 42,3 mH, C_1 = 23,5 nF, C_2 = 235 nF, G_b = -0,409 mS, G_a = -0,758 mS, E= 1,8V, R = 1800 Ω, при които се получават фазовите портрети, показани на фиг.3 и фиг.4.



Фиг.3



Фиг.4

За тях са пресметнати собствените стойности на матриците J_1 и J_2.

Оказва се, че реалните части на собствените стойности на J_1 са както положителни, така и отрицателни:

$$Re\{\lambda_{1i}\} = [-0.35, -0.35, 0.902]$$

Докато при втората матрица J_2, която се отнася за тази част от фазовото пространство, която съдържа страничите части от нелинейната характеристика, собствените стойности имат само отрицателни реални части:

$$Re\{\lambda_{1i}\} = [-0.35, -0.35, -1.798]$$

Тези изчисления са направени и за друг набор стойности на параметрите на веригата от фиг.1 [4]:

L= 22mH, C_1 = 10 nF, C_2 = 100 nF, G_b = -0,41 mS, G_a = -0,757 mS, E= 1,5V, R = 1640Ω, за които са получени аналогични резултати.

Това дава основание да се направи изводът, че в тази част от фазовото пространство, която е близка до центъра на координатната система, синхронизацията между двете системи е неустойчива.

4. Изводи

На база на предложения в доклада критерий за устойчива синхронизация на свързани идентични хаотични системи е направено числено изследване за синхронизиране на генератори на Чуа. Получените резултати показват неустойчива синхронизация в областта на фазовото пространство, която обхваща началото на координатната система (особена точка с координати 0,0,0). По-добро синхронизиране е възможно в тези области на фазовото пространство, които обхващат крайните участъци на нелинейната характеристика. Там са изпълнени условията съгласно изведения количествен критерий за устойчивост на хаотичната синхронизация.

Литература

[1] Pecora L M and Carroll T L. Synchronization in chaotic systems, Phys. Rev. Lett., 64, p. 821-823; 1990

[2] Pecora, L. M. & Carroll, T. L. Driving systems with chaotic signals," Phys. Rev. Lett., A44, 2374-2383. 1991

[3] Kolumban G., M.P. Kennedy, L.O. Chua., The role of synchronisation in digital communications using chaos - part II : Chaotic modulation and chaotic synchronisation, IEEE Transactions on Circuits and Systems - I : fundamental theory and applications, Vol. 45, No. 11, 1998

[4] Matsumoto T., Chua L.O. Journal of circuits, systems and computers. Special Issue on Chua.s Circuit: Paradigm for Chaos. 1993. V. 3(2).

[5] Cincotti S., Teglio A. Generalized synchronization on linear manifold in coupled non-linear systems // IEEE Transactions on Circuitsand Systems. Fundamental Theory and Applications. 2002. Vol. 49, No.3. p. 81 -85.

[6] Cherneva G. A Mathcad Based Examination of Bifurcations in Third Order Nonlinear Circuit . Conference “Advanced Aspects of Theoretical Electrical Engineering”. The days of science of the Technical University of Sofia. Sozopol’10, 19– 22.09.10, pp.22-26.

RESEARCH ON THE STABILITY OF SYNCHRONIZATION IN CONNECTED CHAOTIC SYSTEMS

Galina Cherneva
cherneva@vtu.bg

Todor Kableshkov University of Transport,
Sofia, 158 Geo Milev Str
BULGARIA

Key words: *chaotic systems, phase space, chaotic attractor, synchronization*

Abstract: *The synchronization in connected chaotic systems haves fundamental importance in the application of chaotic fluctuations in different areas of the technics: when transmitting of managing influences, in systems for transmission of information, etc. Due to the nature and characteristics of chaotic processes, however, the complete synchronization of the two systems, if its are identical, it is difficult realizable.*

In this work is proposed a criterion for stability of synchronization in related identical chaotic systems. Its application is illustrated at synchronization on systems of third order.