Механика
Транспорт
Комуникации
Научно списание

ISSN 1312-3823
брой 1, 2003 г.
статия № 0001
http://www.mtc-aj.com

МОДИФИЦИРАНИ УРАВНЕНИЯ НА ЛАГРАНЖ ОТ II-РИ РОД

Петър Колев
petarkolev@BGscience.com

Катедра "Механика", ВТУ "Т. Каблешков" - София 1574, БЪЛГАРИЯ

***Ключови думи**: аналитична механика, динамика, роботи*

***Резюме**: Когато при динамичен анализ на идеална холономна механична система се налага да се опише движението й с обобщени координати, чиито брой надвишава степените й на свобода може да се да се изразят зависимите, чрез избраните за независими обобщени координати и да се приложат уравненията на Лагранж от II-ри род за холономна система или да се приложат уравненията на Лагранж от II-ри род с множители. Това създава известни затруднения тъй като изразените координати участват на степен II-ра в енергийните функции, а множителите се определят за всяка задача.*

Предвид затрудненията при използването на известните два подхода, в тази работа е изведена нова, удобна за приложение форма на "Общото уравнение на динамиката" в обобщени координати наречена "Модифицирани уравнения на Лагранж от II-ри род".

1.Увод

Когато при динамичен анализ на една идеална холономна механична система се налага да се опише движението й с обобщени координати, чиито брой надвишава степените й на свобода може да се постъпи по два начина:

- да се изразят зависимите, чрез избраните за независими обобщени координати и да се приложат уравненията на Лагранж от II-ри род за холономна система. Това създава известни затруднения тъй като изразените координати участват на степен II-ра в енергийните функции;

- да се приложат уравненията на Лагранж от II-ри род с множители, като множителите се определят са всяка задача.

Предвид затрудненията при използването на известните два подхода, в тази работа е изведена нова, удобна за приложение, на "Общото уравнение на динамиката" в обобщени координати наречена *"Модифицирани уравнения на Лагранж от II-ри род"*.

2. Извод на уравненията

Нека движението на холономна механична система, подчинена на идеални и двустранни връзки, с k степени на свобода се описва с n зависими обобщени координати $q_1, \; q_{2, \ldots\ldots\ldots} q_n$ $(n > k)$. Те са подчинени на s холономни връзки $s = n - k$.

(2.14) $\Gamma_r(q_1, q_{2,} \ldots\ldots\ldots\ldots, q_n)$ $(r = 1,2, \ldots\ldots\ldots, s)$

Следователно от всички вариации δq_j $(j = 1,2, \ldots., n)$ само k са независими.

Като запишем общото уравнение на динамиката в обобщени координати

(2.15) $$\sum_{j=1}^{n}\left[Q_j - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j}\right) + \frac{\partial T}{\partial q_j}\right]\delta q_j = 0$$

поради зависимост на вариациите, не можем да констатираме равенството на нула на изразите в средните скоби.

От системата (2.14) изразяваме s обобщени координати. За удобство на извода на модифицираните уравненията избираме първите s координати,

(2.16) $q_r = f_r(q_{s+1}, q_{s+2}, \ldots\ldots\ldots\ldots q_n)$ $(r + 1,2, \ldots\ldots\ldots\ldots, s)$

и определяме техните вариации

(2.17) $$\delta q_r = \sum_{j=s+1}^{n}\frac{\partial f_r}{\partial q_j}\delta q_j \qquad (r = 1,2, \ldots\ldots\ldots\ldots, s)$$

Уравнението (2.15) можем да представим във вида

(2.18) $$\sum_{r=1}^{s}(Q_r + \Phi_r)\,\delta q_r + \sum_{j=s+1}^{n}(Q_j + \Phi_j)\,\delta q_j = 0$$

където Φ_r и Φ_j, са обобщените инерционни сили.

Като заместим (2.17) в (2.18) след кратки преобразувания се получава:

(2.19) $$\sum_{j=s+1}^{n}\left(Q_j + \Phi_j + \sum_{r=1}^{s}(Q_r + \Phi_r)\,\frac{\partial f_r}{\partial q_j}\right)\delta q_j = 0$$

Тези $n - s = k$ вариации на обобщените координати са независими и уравнението (2.19) се удовлетворява от условието за равенство на нула на изразите в средните скоби. С това се получават *модифицираните уравнения*, удобни за съставяне на диференциалните уравнения на движение на холономна механична система подчинена на идеални и двустранни връзки със зависими обобщени координати във формата на Лагранж

(2.20) $$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_j} = Q_j + \sum(Q_r + \Phi_r)\frac{\partial f_r}{\partial q_j}$$

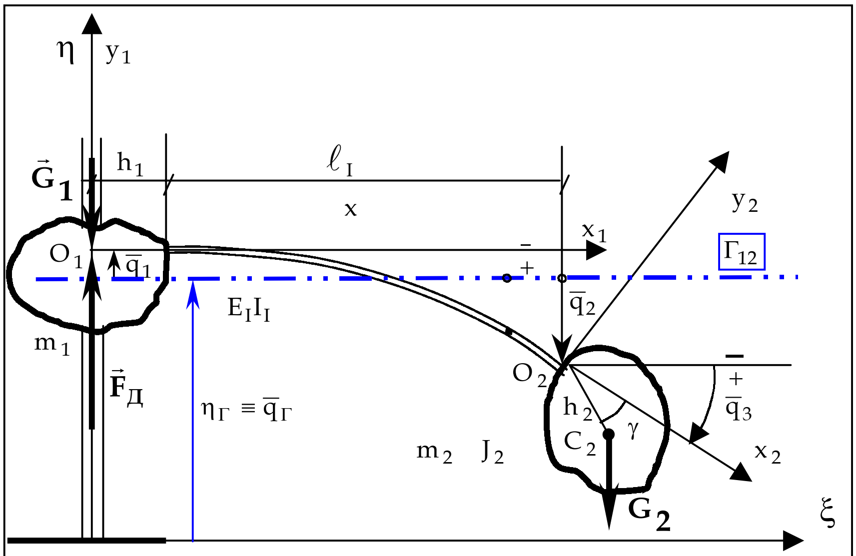
където:

(2.21) $$\Phi_r = -\left[\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_r}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_r}\right] \qquad (r = 1,2, \ldots\ldots\ldots, s)$$

Q_r => обобщените сили на зависимите координати.

3.Приложение

Разглеждаме дискретна манипулационна система при движението й във вертикална равнина. Задвижващият модул е тяло 1, върху което е приложено задвижване със сила $F_Д$. Моделираме взаимодействието между регионалното движение и съпътстващите го трептения, при ограничена мощност на задвижването.



Фиг. 1 Моделиране на смутено движение

Центровата ос на разглежданата сиситема се определя за началните условия, съответстващи на статичното равновесие, където $\theta = k_4\delta$ е завъртането, а δ е статичното провисване на сечението в т. O_2 на запънатата в тяло 1 еластична ръка..

За параметъра на центровата ос Γ_{12} се получава

$$(3.1)\quad q_1^* = q_{1,0} - \frac{1}{m_1 + m_2}\left(m_2\delta + m_2\theta h_{C_2}\cos\gamma\right),$$

а като въведем центровите обобщени координати за геометричното центрово условие получаваме.

$$(3.2)\quad m_1\bar{q}_1 + m_2\bar{q}_2 + m_2\bar{q}_3 h_{C_2}\cos\gamma = 0$$

За равновесното положение, като използваме израза на потенциалната енергия в обобщени координати са в сила условията:

$$(3.3)\quad m_2 g - \left(\frac{\partial \Pi}{\partial q_2}\right)_{\substack{q_2=\delta \\ q_3=\theta}} = 0 \qquad m_2 g h_{C_2}\cos\gamma - \left(\frac{\partial \Pi}{\partial q_3}\right)_{\substack{q_2=\delta \\ q_3=\theta}} = 0$$

Следователно от системата уравнения:

$$(3.4)\quad \begin{aligned} m_2 g &= c_{22}\delta + c_{23}\theta \\ m_2 g h_{C_2}\cos\gamma &= c_{23}\delta + c_{33}\theta \end{aligned}$$

еднозначно се определят δ и θ.

Кинетична и потенциална енергия

Кинетична и потенциална енергии, изразени чрез обобщените центрови координати се представят с изразите

$$
(3.5)\quad
\begin{aligned}
&T=\frac{1}{2}\left[m_1(\dot{\bar q}_\Gamma-\dot{\bar q}_1)^2+m_2(\dot{\bar q}_\Gamma-\dot{\bar q}_2)^2+J_{O_2}\dot{\bar q}_3^2\right]-m_2(\dot{\bar q}_\Gamma-\dot{\bar q}_2)\dot{\bar q}_3h_{C_2}\cos\gamma\\
&\Pi_{\text{ел}}=\frac{1}{2}\left[c_{22}(\bar q_1+\bar q_2)^2+2c_{23}(\bar q_1+\bar q_2)\bar q_3+c_{33}\bar q_3^2\right]
\end{aligned}
$$

Обобщени сили по центровите координати

$$
(3.6)\quad
\begin{aligned}
&Q_{\bar\Gamma}=F_{\text{Д}}-(m_1+m_2)g\\
&Q_{\bar 1}=F_{\text{Д}}-m_1g-c_{22}(\bar q_1+\bar q_2)-c_{23}\bar q_3\\
&Q_{\bar 2}=m_2g-c_{22}(\bar q_1+\bar q_2)-c_{23}\bar q_3\\
&Q_{\bar 3}=m_2gh_{C_2}(\cos\gamma-\bar q_3\sin\gamma)-c_{23}(\bar q_1+\bar q_2)-c_{33}\bar q_3
\end{aligned}
$$

Геометричното центрово условие (3.2) представлява холономна връзка Γ_1 между обобщените центрови координати, поради което те са зависими. По тази причина за извод на диференциалните уравнения на движение ще приложим, изведените в тази работа., модифицирани уравнения на Лагранж от II-ри род. За зависима от останалите избираме координатата $\bar q_1=f_1(\bar q_\Gamma,\bar q_2,\bar q_3)$ следователно:

$$
(3.7)\quad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial\dot{\bar q}_j}\right)-\frac{\partial T}{\partial\bar q_j}=Q_{\bar j}+\sum_{r=1}^{s}\left(Q_{\bar 1}+\Phi_1\right)\frac{\partial f_1}{\partial\bar q_j}\qquad (j=\Gamma,2,3)
$$

$$
(3.8)\quad \bar q_1=f_1(\bar q_\Gamma,\bar q_2,\bar q_3)=\frac{m_2}{m_1}\bar q_2+\frac{m_2}{m_1}\bar q_3h_{C_2}\cos\gamma
$$

$$
(3.9)\quad
\begin{aligned}
&\Phi_1=-\left[\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial\dot{\bar q}_1}\right)-\frac{\partial T}{\partial\bar q_1}\right]=-\,m_1(\ddot{\bar q}_\Gamma-\ddot{\bar q}_1)\\
&\frac{\partial f_1}{\partial\bar q_\Gamma}=0\qquad \frac{\partial f_1}{\partial\bar q_2}=\frac{m_2}{m_1}\qquad \frac{\partial f_1}{\partial\bar q_3}=\frac{m_2}{m_1}h_{C_2}\cos\gamma
\end{aligned}
$$

Като заместим кинетичната енергия и обобщените сили в уравненията (3.7) и отчетем (3.9) получаваме математичния модел на смутеното движение:

(3.10)

$$(m_1+m_2)\ddot{q}_Г = F_Д - (m_1+m_2)g$$

$$\ddot{q}_2 + \ddot{q}_3 h_{C_2}\cos\gamma + \frac{c_{22}(m_1+m_2)}{m_1 m_2}\bar{q}_2 + \frac{c_{23}m_1 + c_{22}m_2 h_{C_2}\cos\gamma}{m_1 m_2}\bar{q}_3 = \frac{F_Д}{m_1+m_2}$$

$$\ddot{q}_2\frac{(m_1+m_2)m_2 h_{C_2}\cos\gamma}{m_1} + \ddot{q}_3\left[J_{O_2} + \frac{(m_2 h_{C_2}\cos\gamma)^2}{m_1}\right] +$$

$$+\bar{q}_2\frac{m_1+m_2}{m_1}\left(c_{23} + c_{22}\frac{m_2}{m_1}h_{C_2}\cos\gamma\right) +$$

$$\bar{q}_3\left[\begin{array}{l} 2c_{23}\dfrac{m_2}{m_1}h_{C_2}\cos\gamma + c_{22}\left(\dfrac{m_2}{m_1}h_{C_2}\cos\gamma\right)^2 + \\ + c_{33} + m_2 g h_{C_2}\sin\gamma \end{array}\right] = F_Д\frac{m_2}{m_1}h_{C_2}\cos\gamma$$

ЛИТЕРАТУРА:

[1] ДОЛАПЧИЕВ БЛ., Аналитична механика. Наука и изкуство. София. 1966.

[2] КОЛЕВ П.К., Динамичен анализ на малките собствени трептения на особени механични системи. Механика на машините, .№26, 1999г.

[3] КОЛЕВ П.К., Центрови оси на особени монозвенни манипулационни системи. Механика на машините, 2002 г.

MODIFIED EQUATIONS OF LAGRANGE OF II ORDER

Peter Kolev

Department of Mechanics, Todor Kableshkov Higher School of Transport, Sofia 1574, BULGARIA

Keywords*: Analytic mechanics, dynamics, robots.*

Summary: *When it is necessary to describe the movement of an ideal holonom mechanical system with its dynamic analysis using summarized coordinates the number of which exceeds its degrees of freedom, the dependents can be expressed by the summarized coordinates chosen to be independent and the equations of Lagrange of II order can be applied for a holonom system or it can be applied with factors. That creates certain difficulties as the coordinates expressed take part in the energy functions being on second power and the factors are determined for each problem.*
Having in mind the difficulties with using two approaches already known, the paper presents a new form of "the general equation of dynamics" in summarized coordinates that is convenient to apply. This form is called "modified equations of Lagrange of II order".